

『情報とインセンティブの経済学』web 補論：第7章

補論 7-1 価格差別によるスクリーニングの詳細な分析

スクリーニングのための価格差別問題の詳細な分析を行おう。問題は次のものだった。

$$\max q \left[t_L - \frac{x_L^2}{2} \right] + (1-q) \left[t_H - \frac{x_H^2}{2} \right]$$

subject to

$$a_L x_L - t_L \geq 0 \quad (\text{PC}_L),$$

$$a_H x_H - t_H \geq 0 \quad (\text{PC}_H),$$

$$a_L x_L - t_L \geq a_L x_H - t_H \quad (\text{IC}_L),$$

$$a_H x_H - t_H \geq a_H x_L - t_L \quad (\text{IC}_H).$$

ここで、 (PC_i) はタイプ i ($i = L, H$) の顧客についての参加制約、 (IC_i) はタイプ i の顧客についてのインセンティブ制約だ。4本の制約式の問題を解くのは困難だ。そこで、問題の本質をより明確に捉えることができるシンプルな条件に制約条件を書き換えてみよう。

ではオリジナルの制約条件が成立すればどのような条件が成立するかを見てみよう。

ステップ 1: $x_H \geq x_L$ が成立する (単調性)。

証明:

2つの不等式 (IC_L) と (IC_H) を足しあわせて整理すると、 $(a_H - a_L)(x_H - x_L) \geq 0$ を得る。そして $a_H > a_L$ より $x_H \geq x_L$ が成立する。つまり、より財・サービスを高く評価するタイプ H にはより質が高い財・サービスを提供する。

ステップ 2: タイプ H の参加制約 (PC_H) は無視してもよい。

証明:

(PC_L) と (IC_H) 、そして $a_H > a_L$ より、

$$a_H x_H - t_H \geq a_H x_L - t_L \geq a_L x_L - t_L \geq 0$$

が成立する。よって、 (PC_H) は他の条件が成立すれば自動的に成立するので考慮する必要はない。

インセンティブ制約を満たすために、タイプ H はプラスの情報レントを得るので、参加制約はそれにより満たされる。

ステップ 3: タイプ H のインセンティブ制約 (IC_H) は等号で成立する。

証明:

仮に $a_H x_H - t_H > a_H x_L - t_L$ が成立するとする。このとき、 t_H を増加させても、 (PC_L) は影響を受けず、 (IC_L) は満たされやすくなる。また、 (PC_L) と (IC_H) が満たされるならば、 (PC_H) は常に成立するので問題ない。

ステップ4: タイプ L のインセンティブ制約 (IC_L) は無視してもよい.

証明:

等号の (IC_H) より, $a_H(x_H - x_L) = t_H - t_L$ が成立する. そして, 単調性 $x_H \geq x_L$ より $a_H(x_H - x_L) \geq a_L(x_H - x_L)$ が成立し, よって $t_H - t_L \geq a_L(x_H - x_L)$ となり, $a_L x_L - t_L \geq a_L x_H - t_H$ が満たされる.

つまり, タイプ L にはタイプ H をターゲットにしたメニューを選ぶインセンティブはない.

ステップ5: タイプ L の参加制約 (PC_L) は等号で成立する.

証明:

もし $a_L x_L - t_L > 0$ ならば, t_L と t_H を等号の (IC_H) を満たすように同時に増やすことができる. (IC_H) が等号で成立していれば, タイプ L のインセンティブ制約 (IC_L) は満たされており, (PC_L) と (IC_H) が満たされていればタイプ H の参加制約 (PC_H) も満たされる.

以上より企業の問題は次のように書き換えることができる.

$$\max q \left[t_L - \frac{x_L^2}{2} \right] + (1 - q) \left[t_H - \frac{x_H^2}{2} \right]$$

subject to

$$x_H \geq x_L$$

$$a_L x_L - t_L = 0,$$

$$a_H x_H - t_H = a_H x_L - t_L.$$

本文中ではこの問題を単調性の条件を無視して解いた. そして, 得られた解は単調性を満たすので問題はない.

補論 7-2 顕示原理の証明

価格差別のモデルでは企業 (プリンシパル) が, (品質, 支払い) の組み合わせを顧客 (エージェント) に提示し, 顧客たちはそれを選択した. けれども, もっと複雑な販売契約やオプションを提示することでさらに企業の利益を高められないのか. またはレストランと顧客とのあいだのコミュニケーションを許容することで, もっと情報を効率的に集めることができないのか. といった疑問も出てくる. タイプに応じた選択肢を用意してそれを選ばせることで本当に十分なのだろうか. 実はこれで十分だと言える. そして, その主張の背後には顕示原理がある.

一般的な販売メカニズムを価格差別モデルの枠組みで考えよう. まず, 企業と顧客とのあいだの情報のやりとりを許容し, 企業がデザインするメカニズムを (M, \hat{x}, \hat{t}) とする. ここで M は顧客が送るメッセージの空間であり, 企業は非現実的なものも含めて何でも指定することができる. そして, 顧客がメッセージ $m \in M$ を送れば, 企業は品質 $\hat{x}(m)$ と支払い $\hat{t}(m)$ を指定する.

顧客の効用は $u(x, t; a) = ax - t$ だったことを思い出そう. そして, 各タイプの顧客はメカニズムが与えられたときに, 自分の満足が最大化するようにメッセージを送る. それを $m^*(a_i)$ ($i = L, H$) とすると, 任意の $m \in M$ について

$$u(\hat{x}(m^*(a_i)), \hat{t}(m^*(a_i)); a_i) \geq u(\hat{x}(m), \hat{t}(m); a_i)$$

が満たされる。したがって、とくに

$$u(\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)); a_H) \geq u(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L)); a_H),$$

と

$$u(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L)); a_L) \geq u(\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)); a_L),$$

が満たされる。つまり他のタイプにとって最適なメッセージを送ってもよくなることはない。そして、メカニズム (M, \hat{x}, \hat{t}) によって $\{(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L))), (\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)))\}$ という配分が実行される。

メッセージとして何を顧客に送らせるかの候補は無数にあるが、とくにメッセージとしてタイプを顕示させるようなメカニズム、つまり $M = \{a_L, a_H\} \equiv \Theta$ であるようなメカニズムを直接顕示メカニズムと呼び、 $(\Theta, x(a), t(a))$ と表記しよう。

そして、直接顕示メカニズムが

$$u(x(a_H), t(a_H); a_H) \geq u(x(a_L), t(a_L); a_H),$$

$$u(x(a_L), t(a_L); a_L) \geq u(x(a_H), t(a_H); a_L),$$

という2つのインセンティブ制約を満たすとき、各タイプの顧客は自分のタイプを正直に表明する。

以上のセットアップのもと、顕示原理は次のことを主張する。

顕示原理：何らかのメカニズム (M, \hat{x}, \hat{t}) で実行される任意の配分は、真実を表明するような直接顕示メカニズムによっても実行することができる。

証明：

メカニズム (M, \hat{x}, \hat{t}) によって配分 $\{(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L))), (\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)))\}$ が実行されることに注意しよう。ここで $(x(a), t(a)) = (\hat{x}(m^*(a)), \hat{t}(m^*(a)))$ であるような直接顕示メカニズムを考える。

すると、

$$u(\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)); a_H) \geq u(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L)); a_H),$$

$$u(\hat{x}(m^*(a_L)), \hat{t}(m^*(a_L)); a_L) \geq u(\hat{x}(m^*(a_H)), \hat{t}(m^*(a_H)); a_L),$$

が成立するので、定義より

$$u(x(a_H), t(a_H); a_H) \geq u(x(a_L), t(a_L); a_H),$$

$$u(x(a_L), t(a_L); a_L) \geq u(x(a_H), t(a_H); a_L),$$

が成立する。よって、真実を表明するような直接顕示メカニズムによってメカニズム (M, \hat{x}, \hat{t}) と同じ配分が実行される。