『ゲーム理論ワークブック』
練習問題の解答・解説[*1]

2015 年 12 月 ver. 1.0 公開
2016 年 6 月 ver. 1.1 公開
2018 年 2 月 ver. 1.2 公開

岡田章［監修・著］／加茂知幸・三上和彦・宮川敏治［著］

発行所：有斐閣
2015 年 12 月 10 日　初版第 1 刷発行
ISBN 978-4-641-16463-5

[*1] 岡田章［監修・著］／加茂知幸・三上和彦・宮川敏治［著］『ゲーム理論ワークブック』（有斐閣，2015 年）の【練習問題の解答・解説】を公開しています。
なお，作成にあたっては，内容に誤りのないようできる限り注意を払いましたが，本書および本解答集につきまして，結果生じたこと（損害等）には，監修者，著者，出版社とも責任を負うことはできませんので，ご了承ください。

目次

第 1 章

選択と意思決定

問題 1.1.

(1) 1 回も 1 の目が出ない確率は $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ である。少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ である。

$$\mathbf{\frac{11}{36}}\ \textbf{（答）}$$

(2) 3 回投げて 1 回も 1 の目が出ない確率は $(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$ である。少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$ である。

前者に賭けたほうが勝つ確率が高い（答）

(3) 4 回投げて 1 回も 1 の目が出ない確率は $(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296}$ である。少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$ である。

後者に賭けたほうが勝つ確率が高い（答）

問題 1.2. 3 つのサイコロを区別して考えると，目の出方は全部で $6^3 = 216$ 通りある。

出た目の和が 9 となるのは，出た目の集合が

$$\{1,2,6\},\ \{1,3,5\},\ \{1,4,4\},\ \{2,2,5\},\ \{2,3,4\},\ \{3,3,3\}$$

となる場合であるから，

$$6+6+3+3+6+1=25$$

より，全部で 25 通りある。よって，その確率は $\frac{25}{216}$ である。このとき，賞金の期待値は $\frac{25}{216} \times 100$ 万円である。

出た目の和が 10 となるのは，出た目の集合が

$$\{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ ,\ \{2,2,6\},\ \{2,3,5\},\ \{2,4,4\},\ \{3,3,4\}$$

となる場合であるから，

$$6+6+3+6+3+3=27$$

より，全部で 27 通りある。よって，その確率は $\frac{27}{216}$ である。このとき，賞金の期待値は $\frac{27}{216} \times 100$ 万円である。

出た目の和が 10 になるほうが確率が高いので，期待値も高くなる。

「目の和が 10 になる」ほうが高い（答）

問題 1.3.

(1) ギャンブルに参加したときの期待効用は

$$0.5 \times \sqrt{10,000} + 0.5 \times \sqrt{0} = 50$$

である。参加しなかった場合は $\sqrt{2,800} = 20\sqrt{7} > 50$ である。

ギャンブルに参加しない（答）

(2) ギャンブルに参加したときの期待効用は

$$0.5 \times \sqrt{10,800} + 0.5 \times \sqrt{3600 - 2800} = 30\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \approx 66.1$$

である。参加しなかった場合は $\sqrt{3,600} = 60 < 66.1$ である。

ギャンブルに参加する（答）

コメント：所持金（所得）の大きさに応じて，リスクに対する態度が変わることがある。

問題 1.4.

(1) 0.5×30 万 $+0.5 \times 0$=15 万.

15 万円（答）

(2) $0.5 \times \sqrt{30\text{ 万}} + 0.5 \times \sqrt{0} = 50\sqrt{30}$.

$50\sqrt{30}$（答）

(3) $\sqrt{x} = 50\sqrt{30}$ より $x = 75000$.

7 万 5000 円（答）

(4) プロジェクトに投資しなかったときの効用は $\sqrt{10\text{ 万}} = 100\sqrt{10}$ であり，投資したときの期待効用 $50\sqrt{30}$ よりも大きい。あるいは，プロジェクトに投資したときの確実性同値額 75000 円は 10 万円よりも小さい。

投資しない（答）

(5) 計画に参加すると，1 万円を出資するので，所持金は 9 万円となるが，確率 50% で 3 万円の収益が得られる。計画に参加したときの期待効用は

$$0.5 \times \sqrt{12\text{ 万}} + 0.5 \times \sqrt{9\text{ 万}} = 100\sqrt{3} + 150 = 323.2050\ldots$$

である。一方，参加しないときの期待効用は $100\sqrt{10} = 316.2277\ldots$ であり，参加したほうが期待効用が高い。

参加する（答）

コメント：リスク分担によるメリットをあらわす例。

問題 1.5.

(1) 買い手が価格 p で自転車を買いたいと思うのは，

$$（買ったときの効用）\geqq（買わなかったときの効用）$$

すなわち

$$U(1, Y-p) \geqq U(0, Y)$$

のときである。留保価格は，上式を満たす最大の p である。これは，上式が等号で成り立つような p のことである。

$\boldsymbol{U(1, Y-p^*) = U(0, Y)}$ **（答）**

(2) $U(x, y) = u(x) + y$ のとき，(1) の条件式より

$$u(1) + (Y - p^*) = u(0) + Y$$

すなわち

$$p^* = u(1) - u(0)$$

である。

$\boldsymbol{p^* = u(1) - u(0)}$ **（答）**

問題 1.6. 事故を起こしたタクシーが緑タクシーである事象を G，青タクシーである事象を B とする。目撃者が，事故を起こしたのは緑タクシーであると証言する事象を g，青タクシーであると証言する事象を b とする。題意より $P(G) = 0.85, P(B) = 0.15$ である（各タクシーが事故を起こす確率は等しいとする）。目撃者が青タクシーと証言するのは，「事故を起こしたのは青タクシーで，正しく色を判断した場合」か「事故を起こしたのは緑タクシーであるが，色を誤って判断した場合」のいずれかである。つまり

$$\begin{aligned} P(b) &= P(b|B)P(B) + P(b|G)P(G) \\ &= 0.8 \times 0.15 + 0.2 \times 0.85 = 0.29 \end{aligned}$$

である。よって，求める確率は

$$P(B|b) = \frac{P(b|B)P(B)}{P(b)} = \frac{0.8 \times 0.15}{0.29} = 0.41379\ldots$$

およそ 41.4% （答）

問題 1.7.

(1) $\frac{1}{2} \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \cdots = 1 + 1 + \cdots = \infty$

(2) 求める期待効用を $E[u]$ とすると

$$\begin{aligned} E[u] &= \log_2 2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \log_2 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \log_2 2^3 + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots\right) \log_2 2 \end{aligned}$$

ここで $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$ とおくと，

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots$$

より，

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

すなわち

$$S = 2$$

である。よって，$E[u] = 2\log_2 2$ である。

$2\log_2 2$ （答）

(3) $2^n < 2$ 億となるのは $n < 27$ のときであるから，賞金の期待値は

$$\frac{1}{2} \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{27} \times 2^{27} = 1 + 1 + \cdots + 1 = 27$$

27（答）

第 2 章

戦略ゲームとナッシュ均衡点

問題 2.1. 行（T, M, B）を選択するプレイヤーを 1，列（L, C, R）を選択するプレイヤーを 2 とする。

(1) (i) 利得行列において，各列のプレイヤー 1 の利得を上下で比較して値の大きいほうを◯で示す。これはプレイヤー 1 の最適応答を表す。すなわち，プレイヤー 2 の戦略がいずれであっても，プレイヤー 1 の最適応答は B である。

	L	R
T	3, 2	0, 4
B	4, 0	1, 1

(ii) 同様に，利得行列において，各行のプレイヤー 2 の利得を左右で比較して値の大きいほうを◯で示すと，プレイヤー 2 の最適応答が表される。すなわち，プレイヤー 1 の戦略がいずれであっても，プレイヤー 2 の最適応答は R である。

	L	R
T	3, 2	0, 4
B	4, 0	1, 1

(iii) 利得行列に 2 人のプレイヤーの最適応答を書き入れる。◯が 2 つ揃ったセルに対応する戦略の組は（B, R）である。これは，「R に対する最適応答は B」であり，「B に対する最適応答は R」であることを意味する。つまり，◯が 2 つ揃ったセルに対応する戦略の組はナッシュ均衡点である。したがって，このゲームのナッシュ均衡点は（B, R）のみである。

	L	R
T	3, 2	0, 4
B	4, 0	1,1

(B, R)（答）

(2) (i) プレイヤー 2 の戦略が L のとき，プレイヤー 1 の最適応答は T である。プレイヤー 2 の戦略が R のとき，プレイヤー 1 の最適応答は B である。

	L	R
T	1, 1	1, 0
B	0, 3	2, 2

(ii) プレイヤー 1 の戦略がいずれであっても，プレイヤー 2 の最適応答は L である。

	L	R
T	1, 1	1, 0
B	0, 3	2, 2

(iii) (i), (ii) より，このゲームの純戦略ナッシュ均衡点は（T, L）のみである。

	L	R
T	1, 1	1, 0
B	0, 3	2, 2

（T, L）（答）

(3) (i) プレイヤー 2 の戦略が L のとき，プレイヤー 1 の最適応答は B である。プレイヤー 2 の戦略が R のとき，プレイヤー 1 の最適応答は T である。

	L	R
T	0, 2	2, 3
B	2, 1	1, 0

(ii) プレイヤー 1 の戦略が T のとき，プレイヤー 1 の最適応答は R である。プレイヤー 1 の戦略が B のとき，プレイヤー 1 の最適応答は L である。

	L	R
T	0, 2	2, 3
B	2, 1	1, 0

(iii) (i), (ii) より，このゲームの純戦略ナッシュ均衡点は（T, R）と（B, L）である。

	L	R
T	0, 2	2, 3
B	2, 1	1, 0

（T, R），（B, L）（答）

(4) (i) プレイヤー 2 の戦略が L のとき，プレイヤー 1 の最適応答は T である。プレイヤー 2 の戦略が R のとき，プレイヤー 1 の最適応答は B である。

	L	R
T	3, 2	1, 1
B	2, 0	2, 1

(ii) プレイヤー 1 の戦略が T のとき，プレイヤー 1 の最適応答は L である。プレイヤー 1 の戦略が B のとき，プレイヤー 1 の最適応答は R である。

	L	R
T	3, 2	1, 1
B	2, 0	2, 1

(iii) (i), (ii) より，このゲームの純戦略ナッシュ均衡点は（T, L）と（B, R）である。

	L	R
T	3, 2	1, 1
B	2, 0	2, 1

（T, L），（B, R）（答）

(5) (i) プレイヤー 2 の戦略が L のとき，プレイヤー 1 の最適応答は M である。プレイヤー 2 の戦略が C のとき，プレイヤー 1 の最適応答は B である。プレイヤー 2 の戦略が R のとき，プレイヤー 1 の最適応答は T である。

	L	C	R
T	0, 2	2, 1	1,3
M	2,2	1, 0	0, 1
B	1, 0	3,1	0, 0

(ii) プレイヤー 1 の戦略が T のとき，プレイヤー 1 の最適応答は R である。プレイヤー 1 の戦略が M のとき，プレイヤー 1 の最適応答は L である。プレイヤー 1 の戦略が B のとき，プレイヤー 1 の最適応答は C である。

	L	C	R
T	0, 2	2, 1	1,3
M	2,2	1, 0	0, 1
B	1, 0	3,1	0, 0

(iii) (i), (ii) より，このゲームの純戦略ナッシュ均衡点は（T, R），（M, L），（B, C）である。

	L	C	R
T	0, 2	2, 1	1,3
M	2,2	1, 0	0, 1
B	1, 0	3,1	0, 0

（T, R），（M, L），（B, C）（答）

問題 2.2. キッカーが L を選ぶ確率を p，キーパーが ℓ を選ぶ確率を q とする。

キーパーの混合戦略が $(q, 1-q)$ であるとき，キッカーが L を選んだときの期待利得は

$$0.4 \times q + 0.7 \times (1-q) = -0.3q + 0.7$$

である。R を選んだときの期待利得は

$$0.8 \times q + 0.1 \times (1-q) = 0.7q + 0.1$$

である。期待利得を比較して，$-0.3q + 0.7 > 0.7q + 0.1$ すなわち $q < 0.6$ のときは L（$p = 1$）を選択し，$-0.3q + 0.7 < 0.7q + 0.1$ すなわち $q > 0.6$ のときは R（$p = 0$）を選択するのが最適である。$q = 0.6$ のときは，すべての p が最適である（$0 \leqq p \leqq 1$）。したがって，キッカーの最適応答は次のようになる。

キーパーの戦略	最適応答
$q > 0.6$	$p = 0$
$q < 0.6$	$p = 1$
$q = 0.6$	$0 \leqq p \leqq 1$

キッカーの混合戦略が $(p, 1-p)$ であるとき，キ＝パーが ℓ を選んだときの期待利得は

$$(-0.4) \times p + (-0.8) \times (1-p) = 0.4p - 0.8$$

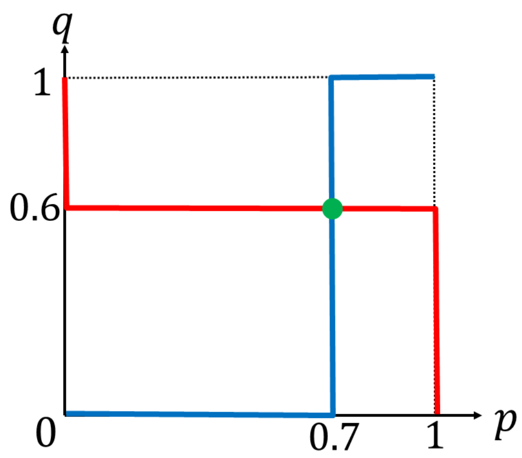
である。r を選んだときの期待利得は

$$(-0.7) \times p + (-0.1) \times (1-p) = -0.6p - 0.1$$

である。期待利得を比較して，$0.4p - 0.8 > -0.6p - 0.1$ すなわち $p > 0.7$ のときは ℓ（$q = 1$）を選択し，$0.4p - 0.8 < -0.6p - 0.1$ すなわち $p < 0.7$ のときは r（$q = 0$）を選択するのが最適である。$p = 0.7$ のときは，すべての q が最適である（$0 \leqq q \leqq 1$）。したがって，キーパーの最適応答は次のようになる。

キッカーの戦略	最適応答
$p < 0.7$	$q = 0$
$p > 0.7$	$q = 1$
$p = 0.7$	$0 \leqq q \leqq 1$

キッカーとキーパーの最適応答グラフは次のようになる。



グラフの交点は

$$(p, q) = (0.7, 0.6)$$

である。$q = 0.6$ のとき，すべての p が最適応答であるから，$p = 0.7$ も最適応答である。$p = 0.7$ のとき，すべての q が最適応答であるから，$q = 0.6$ も最適応答である。すなわち，交点は混合戦略ナッシュ均衡点である。

キッカー：確率 0.7 **で左，確率** 0.3 **で右に蹴る。**
キーパー：確率 0.6 **で左，確率** 0.4 **で右を守る。** **（答）**

コメント：ナッシュ均衡戦略は，マックスミニ戦略とミニマックス戦略の組である（演習 2.7 を参照のこと）。

問題 2.3.

(1) プレイヤーは A 国と B 国の 2 国。各国の戦略は，軍備を「拡張する」か「しない」かの 2 つである。利得行列は以下のとおり。

		B 国	
		拡張する	しない
A 国	拡張する	2, 2	4, 1
	しない	1, 4	3, 3

(2) どちらの国にとっても「拡張する」が支配戦略であるから，ナッシュ均衡点は，2 国とも「拡張する」ことである。

A 国：拡張する　B 国：拡張する　（答）

問題 2.4.

(1) D 社のシェアは 6 割となるので，契約者数は $1000 \times 0.6 = 600$ 人である。D 社は高価格なので，1 人当たりの売上高は 9 である。よって，D 社の売上高は $9 \times 600 = 5400$ 円である。

5400 円（答）

(2) S 社のシェアは 7 割のままなので，契約者数は $1000 \times 0.3 = 300$ 人である。S 社は低価格なので，1 人当たりの売上高は 7 である。よって，S 社の売上高は $7 \times 300 = 2100$ 円である。

2100 円（答）

(3) 利得行列は以下のとおり。

		S 社	
		高価格	低価格
D 社	高価格	$6300, 2700$	$5400, 2800$
	低価格	$5600, 1800$	$4900, 2100$

(4) S 社が低価格のとき，D 社が高価格を選択すると，D 社の利得は 5400 であり，D 社が低価格を選択すると，D 社の利得は 4900 であるから，D 社の最適応答は高価格である。

高価格（答）

(5) D 社が高価格のとき，S 社が高価格を選択すると，S 社の利得は 2700 であり，S 社が低価格を選択すると，S 社の利得は 2800 であるから，S 社の最適応答は低価格である。

低価格（答）

(6) 利得行列より，D 社にとって高価格，S 社にとって低価格は支配戦略である。

D 社：高価格　S 社：低価格（答）

問題 2.5.

(1) 各企業の利潤を π_1, π_2 とすると

$$\pi_1 = pq_1 - 3q_1 = \{15 - (q_1 + q_2)\} q_1$$
$$\pi_2 = pq_2 - 3q_2 = \{15 - (q_1 + q_2)\} q_2$$

(2) q_2 を定数として考えると，π_1 は q_1 の 2 次関数である。

$$\pi_1 = -{q_1}^2 + (15 - q_2)\, q_1.$$

ここで

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -2q_1 + 15 - q_2 = 0$$

より，π_1 が最大値をとるのは $q_1 = -\frac{1}{2}q_2 + \frac{15}{2}$ のときである。

$$\boldsymbol{q_1 = -\frac{1}{2}q_2 + \frac{15}{2}}$$ **（答）**

(3) q_1 を定数として考えると，π_2 は q_2 の 2 次関数である。

$$\pi_2 = -{q_2}^2 + (15 - q_1)\,q_2.$$

ここで

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = -2q_2 + 15 - q_1 = 0$$

より，π_2 が最大値をとるのは $q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2}$ のときである。

$$\boldsymbol{q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2}}$$ **（答）**

(4) このゲームのナッシュ均衡点は，次の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{1}{2}q_2 + \frac{15}{2} \\ q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2} \end{cases}$$

これを解くと $q_1 = q_2 = 5$ である。

$\boldsymbol{q_1 = q_2 = 5}$ **（答）**

コメント： ナッシュ均衡点における市場価格は

$$p = 18 - (5 + 5) = 8$$

であり，各企業の利潤は

$$\pi_1 = \pi_2 = 8 \times 5 - 3 \times 5 = 25$$

である。

問題 2.6.

(1) $p_1 = 5, p_2 = 3$ とする。企業 1 の財に対する需要は 0 であるから，企業 1 の利潤は 0 である。企業 2 の財に対する需要は $18 - 3 = 15$ であるから，企業 2 の利潤は $3 \times 15 - 3 \times 15 = 0$ である。

企業 1：0　企業 2：0（答）

(2) $p_1 = 2, p_2 = 3$ とする。企業 1 の財に対する需要は $18 - 2 = 16$ であるから，企業 1 の利潤は $2 \times 16 - 3 \times 16 = -16$ である。企業 2 の財に対する需要は 0 であるから，企業 2 の利潤は 0 である。

企業 1：−16　企業 2：0（答）

(3) $p_1 > 3$ であるとき，企業 1 の財に対する需要は 0 であるから，企業 1 の利潤は 0 である。$p_1 = 3$ のとき，企業 1 の財に対する需要は $\frac{18-3}{2} = 7.5$ であるから，企業 1 の利潤は $3 \times 7.5 - 3 \times 7.5 = 0$

である。$p_1 < 3$ のとき，企業 1 の財に対する需要は $18 - p_1$ であるから，企業 1 の利潤は

$$p_1 \times (18 - p_1) - 3 \times (18 - p_1) = (p_1 - 3)(18 - p_1) < 0$$

である。つまり，$p_1 \geqq 3$ ならば企業 1 の利潤は 0 であり，$p_1 < 3$ ならば企業 1 の利潤は負の値となる。したがって，$p_1 \geqq 3$ であるとき，企業 1 の利潤が最大となる。

3 以上のすべての価格　（答）

(4) (3) より，$p_2 = 3$ に対して $p_1 = 3$ は最適応答である。同様に，$p_1 = 3$ に対して $p_2 = 3$ は最適応答である。よって，$p_1 = p_2 = 3$ はナッシュ均衡点である。

問題 2.7.

(1) 各企業の利潤を π_1, π_2 とすると

$$\pi_1 = p_1 D_1 - 3D_1 = (p_1 - 3)(9 - p_1 + 0.5p_2)$$
$$\pi_2 = p_2 D_2 - 3D_2 = (p_2 - 3)(9 + 0.5p_1 - p_2)$$

(2) p_2 を定数として考えると，π_1 は p_1 の 2 次関数である。

$$\pi_1 = -{p_1}^2 + (0.5p_2 + 12)\, p_1 - 3(0.5p_2 + 9).$$

ここで

$$\frac{d\pi_1}{dp_1} = -2p_1 + 0.5p_2 + 12 = 0$$

より，π_1 が最大値をとるのは

$$p_1 = \frac{1}{4}p_2 + 6$$

のときである。同様に，p_1 を定数として考えて，π_2 が最大値をとるのは

$$p_2 = \frac{1}{4}p_1 + 6$$

のときである。

企業 1：$\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{4}p_2 + 6}$　企業 2：$\boldsymbol{p_2 = \frac{1}{4}p_1 + 6}$（答）

(3) このゲームのナッシュ均衡点は，次の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{4}p_2 + 6 \\ p_2 = \frac{1}{4}p_1 + 6 \end{cases}$$

これを解くと $p_1 = p_2 = 8$ である。

$\boldsymbol{p_1 = p_2 = 8}$（答）

コメント： ナッシュ均衡点における各企業の生産量は

$$D_1 = D_2 = 9 - 4 = 5$$

であり，各企業の利潤は

$$\pi_1 = \pi_2 = 8 \times 5 - 3 \times 5 = 25$$

である。これは練習問題 2.5 のクールノー競争の結果と一致している。

問題 2.8. 一方のプレイヤーがグーを出す確率が p，チョキを出す確率が q，パーを出す確率が $1 - p - q$ である混合戦略をとるとする。演習 2.5 で見たように，この混合戦略がナッシュ均衡点であるためには，この混合戦略に対して，その相手がグーを出して得られる期待利得とチョキを出して得られる期待利得とパーを出して得られる期待利得が等しくなっていなければいけない。

混合戦略に対して，グーを出すときの期待利得は

$$p \times 0 + q \times 300 + (1 - p - q) \times (-100) = 100p + 400q - 100$$

と表される。次に，チョキを出すときの期待利得は

$$p \times (-300) + q \times 0 + (1 - p - q) \times 100 = 100 - 400p - 100q$$

と表される。さらに，パーを出すときの期待利得は

$$p \times 100 + q \times (-100) + (1 - p - q) \times 0 = 100p - 100q$$

と表される。この 3 つの期待利得が等しいならば，$p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{1}{5}$ が得られる。この混合戦略に対して相手のすべての戦略が最適応答となることから，互いにグーを確率 $\frac{1}{5}$ で出し，チョキを確率 $\frac{1}{5}$ で出し，パーを確率 $\frac{3}{5}$ で出す混合戦略の組はこのゲームの混合戦略ナッシュ均衡点となる。

プレイヤー 1, 2 ともに，グーを確率 $\frac{1}{5}$，チョキを確率 $\frac{1}{5}$，パーを確率 $\frac{3}{5}$ で出す（答）

問題 2.9.

(1) ゲーム 1：C は R を支配する。ゲーム 2, 3：支配関係はない。

(2) ゲーム 1：C は R を支配するので，弱支配する。ゲーム 2：T は B を弱支配する。ゲーム 3：弱支配関係はない。

(3) ゲーム 1：C は R を支配するので R を削除。R を削除後，B は T を支配するので T を削除。T を削除後，L は C を支配するので C を削除。残る戦略は B と L である。
ゲーム 2：T は B を弱支配するので B を削除。B を削除後，L は支配戦略であるので C, R を削除。残る戦略は T と L である。
ゲーム 3：支配関係および弱支配関係はないので，すべての戦略が残る。

(4) ゲーム 1：(B, L)　ゲーム 2：(T, L), (B, C)　ゲーム 3：(T, L), (T, R), (B, L)

問題 2.10. ゼロ和ゲームであるから，（プレイヤー 1 の利得）＝（プレイヤー 2 の損失）と見て，プレイヤー 2 は損失を最小化するように行動すると考える。

		プレイヤー 2	
		表	裏
プレイヤー 1	表	2	−1
	裏	−2	1

プレイヤー 1 が「表」を選ぶ確率を p とし，プレイヤー 2 が「表」を選ぶ確率を q とする。

(1) プレイヤー 1 の混合戦略が「確率 p で「表」，確率 $1-p$ で「裏」を選ぶ」ものであるとする。プレイヤー 2 の戦略が「表」のとき，プレイヤー 1 の期待利得は

$$p \times 2 + (1-p) \times (-2) = 4p - 2$$

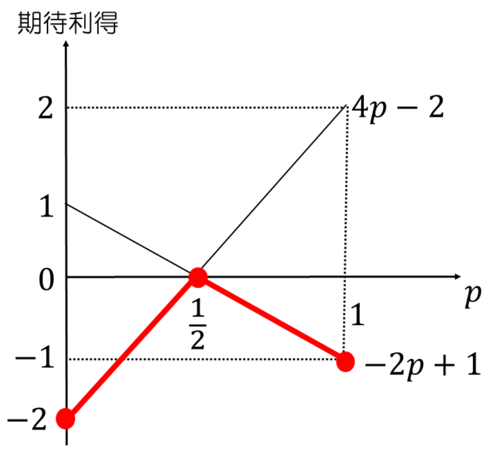
である。プレイヤー 2 の戦略が「裏」のとき，プレイヤー 1 の期待利得は

$$p \times (-1) + (1-p) \times 1 = -2p + 1$$

である。プレイヤー 1 の保証水準は

- $p < \frac{1}{2}$ のとき，$4p-2$
- $p > \frac{1}{2}$ のとき，$-2p+1$
- $p = \frac{1}{2}$ のとき，$4p-2 = -2p+1 = 0$

である。



グラフより，保証水準は $p = \frac{1}{2}$ のとき，最大値 0 をとることがわかる。

確率 $\frac{1}{2}$ で「表」，確率 $\frac{1}{2}$ で「裏」を選ぶ。(答)

(2) プレイヤー 2 の混合戦略が「確率 q で「表」，確率 $1-q$ で「裏」を選ぶ」ものであるとする。プレイヤー 1 の戦略が「表」のとき，プレイヤー 2 の期待損失は

$$q \times 2 + (1-q) \times (-1) = 3q - 1$$

である。プレイヤー 1 の戦略が「裏」のとき，プレイヤー 2 の期待損失は

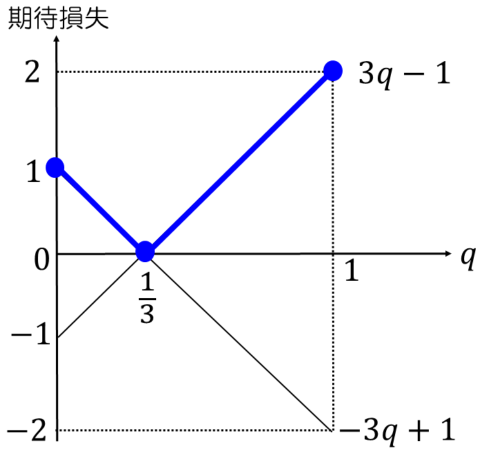
$$q \times (-2) + (1-q) \times 1 = -3q + 1$$

である。プレイヤー 2 の保証水準は

- $q < \frac{1}{3}$ のとき，$-3q+1$
- $q > \frac{1}{3}$ のとき，$3q-1$

- $q = \frac{1}{3}$ のとき，$-3q+1 = 3q-1 = 0$

である。



グラフより，保証水準は $q = \frac{1}{3}$ のとき，最小値 0 をとることがわかる。

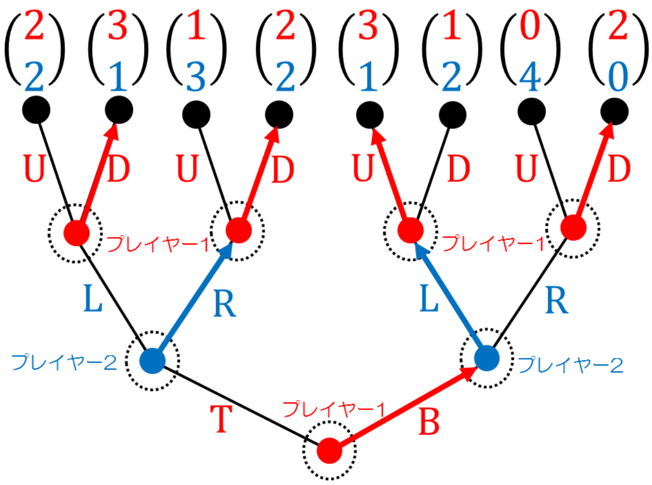
確率 $\frac{1}{3}$ で「表」，確率 $\frac{2}{3}$ で「裏」を選ぶ。（答）

コメント： マックスミニ戦略とミニマックス戦略の組はナッシュ均衡点である（演習 2.3 参照）。

第 3 章

ダイナミックなゲーム

問題 3.1. 後向き帰納法を用いて解くと以下のとおり。矢印が入っている行動戦略が後ろ向き帰納法の解に対応する戦略である。



問題 3.2.

(1) プレイヤー 1 が参加後のゲームのナッシュ均衡点は (U, L) と (D, R) で，均衡利得は $(2,1)$ と $(1,0)$ である。どちらの均衡であっても，プレイヤー 1 の利得は参加しないときの利得を上回っているので，プレイヤー 1 の最適な行動は「参加する」(IN) である。

((IN, U), L), ((IN, D), R) （答）

(2) プレイヤー 1 が参加後のゲームのナッシュ均衡点は (U, L) と (D, R) で，均衡利得は $(2,1)$ と $(-1,0)$ である。前者の均衡のとき，プレイヤー 1 の最適な行動は「参加する」(IN) である。後者の均衡のとき，プレイヤー 1 の最適な行動は「参加しない」(OUT) である。

((IN, U), L), ((OUT, D), R) （答）

問題 3.3. 後向き帰納法に従い，来期の問題から考える。今期にどちらかが「収穫する」を選んだ場合，

来期の資源量は 0 である。今期にどちらも「収穫しない」を選んだ場合，来期の資源量は 200 である。この部分ゲームの利得行列は次のようになる。

	収穫する	しない
収穫する	$100, 100$	$200, 0$
しない	$0, 200$	$0, 0$

このとき，どちらも「収穫する」が支配戦略である。

来期の行動を踏まえて，今期の問題は次の利得行列で表すことができる。

	収穫する	しない
収穫する	$50, 50$	$100, 0$
しない	$0, 100$	$100, 100$

このゲームのナッシュ均衡点は，(i) 両者とも「収穫する」，(ii) 両者とも「収穫しない」の２つである。

以上より，このゲームの部分ゲーム完全均衡プレイは次の２つである。

(i) 2 人とも今期に収穫して，それぞれ 50 を得る
(ii) 2 人とも今期は収穫せず，来期に収穫して，それぞれ 100 を得る **(答)**

コメント：(i) は弱支配戦略均衡点であるが，(ii) での収穫高は (i) のそれよりもパレート優位にある。

問題 3.4.

(1) 両国とも防衛力を強化しているとき，利得行列は次のようになる。

		B 国 攻撃する	B 国 しない
A 国	攻撃する	$-3, -3$	$-3, -2$
	しない	$-2, -3$	$-1, -1$

この場合，両国とも「攻撃しない」が支配戦略である。

A 国：攻撃しない　B 国：攻撃しない（答）

(2) 両国とも防衛力を強化していないとき，利得行列は次のようになる。

		B 国 攻撃する	B 国 しない
A 国	攻撃する	$0, 0$	$3, -3$
	しない	$-3, 3$	$0, 0$

この場合，両国とも「攻撃する」が支配戦略である。

A 国：攻撃する　B 国：攻撃する（答）

(3) A 国のみ防衛力を強化しているとき，利得行列は次のようになる。

		B 国	
		攻撃する	しない
A 国	攻撃する	$1, -4$	$2, -3$
	しない	$-2, -1$	$-1, 0$

この場合，A 国は「攻撃する」，B 国は「攻撃しない」が支配戦略である。

A 国：攻撃する　B 国：攻撃しない（答）

B 国のみ防衛力を強化しているとき，利得行列は次のようになる。

		B 国	
		攻撃する	しない
A 国	攻撃する	$-4, 1$	$-1, -2$
	しない	$-3, 2$	$0, -1$

この場合，A 国は「攻撃しない」，B 国は「攻撃する」が支配戦略である。

A 国：攻撃しない　B 国：攻撃する（答）

(4) 各国の攻撃戦略を前提とすると，防衛戦略に関する利得行列は次のようになる。

		B 国	
		強化する	しない
A 国	強化する	$-1, -1$	$2, -3$
	しない	$-3, 2$	$0, 0$

両国とも「強化する」が支配戦略である。以上より，このゲームの部分ゲーム完全均衡点では，両国とも防衛力を強化した上で，他国を攻撃しないことになる。

2 国ともに　防衛戦略：強化する
攻撃戦略：相手が強化していないときのみ攻撃する　（答）

コメント：各国が攻撃戦略と防衛戦略を同時に選択する場合（同時手番ゲーム），純戦略ナッシュ均衡点は存在しない。混合戦略均衡点では，どちらの国も正の確率で「攻撃する」を選ぶので，紛争を完全に回避することはできない。一方，本問のように防衛戦略を先に決めるのであれば，両国とも「攻撃しない」を選択することになり，紛争を完全に回避することができる。

問題 3.5.

(1) 各企業の利潤を π_1, π_2 とすると

$$\pi_1 = pq_1 - 3q_1 = \{15 - (q_1 + q_2)\}\, q_1$$
$$\pi_2 = pq_2 - 3q_2 = \{15 - (q_1 + q_2)\}\, q_2$$

(2) q_1 を定数として考えると，π_2 は q_2 の 2 次関数である。

$$\pi_2 = -{q_2}^2 + (15 - q_1)\, q_2.$$

ここで

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = -2q_2 + 15 - q_1 = 0$$

より，π_2 が最大値をとるのは $q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2}$ のときである。

$$\boldsymbol{q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2}}$$ **（答）**

(3) π_1 に $q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{15}{2}$ を代入して整理すると

$$\pi_1 = -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{15}{2}q_1.$$

これは q_1 の 2 次関数である。

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -q_1 + \frac{15}{2} = 0$$

より，π_1 が最大値をとるのは $q_1 = \frac{15}{2} = 7.5$ のときである。

$$\boldsymbol{q_1 = 7.5}$$ **（答）**

(4) (2) より，$q_1 = 7.5$ のとき

$$q_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

である。

$$\boldsymbol{q_2 = 3.75}$$ **（答）**

(5) 各企業の生産量が $q_1 = 7.5, q_2 = 3.75$ であるとき，市場価格は

$$p = 18 - (7.5 + 3.75) = 6.75$$

である。

$$\boldsymbol{p = 6.75}$$ **（答）**

コメント：本問のシュタッケルベルグ競争の結果と問題 2.5 のクールノー競争の結果とを比較してみよう。クールノー競争下での総供給量は $5 + 5 = 10$ であるのに対し，シュタッケルベルグ競争下での総供給量は $7.5 + 3.75 = 11.25$ である。すなわち，シュタッケルベルグ競争のほうが総供給量は大きくなっている。その結果，クールノー競争での市場価格は 8 であるのに対して，シュタッケルベルグ競争では 6.75 とより低くなっている。均衡における各企業の利潤の比較については各自で確認されたい。

問題 3.6.

(1) $p = 300$ 円のとき，利得行列は以下のようになる。

		B 降りる	B 降りない
A	降りる	0, −50	0, −100
A	降りない	0, 0	−50, −100

利得行列より，A, B の弱支配戦略はともに「降りる」である。

A：「降りる」　B：「降りる」　(答)

(2) $p = 200$ 円のとき，(1) の結果を前提とすると，利得行列は以下のようになる。

A \ B	降りる	降りない
降りる	50, 0	0, 0
降りない	100, 0	0, −50

利得行列より，A の弱支配戦略は「降りない」，B の弱支配戦略は「降りる」である。

A：「降りない」　B：「降りる」　(答)

(3) $p = 100$ 円のとき，(2) の結果を前提とすると，利得行列は以下のようになる。

A \ B	降りる	降りない
降りる	100, 50	0, 100
降りない	200, 0	100, 0

利得行列より，A, B の弱支配戦略はともに「降りない」。

A：「降りない」　B：「降りない」　(答)

問題 3.7.

(1) $p = 200$ 円のとき，利得行列は以下のようになる。

A \ B	買う	見送る
買う	50, 0	100, 0
見送る	0, 0	100, 50

利得行列より，A の弱支配戦略は「買う」，B の弱支配戦略は「見送る」。

A：「買う」　B：「見送る」　(答)

(2) $p = 300$ 円のとき，(1) の結果を前提とすると，利得行列は以下のようになる。

A \ B	買う	見送る
買う	0, −50	0, 0
見送る	0, −100	100, 0

利得行列より，A, B の弱支配戦略はともに「見送る」。

A：「見送る」　B：「見送る」　(答)

(3) $p = 400$ 円のとき，(2) の結果を前提とすると，利得行列は以下のようになる。

		B 買う	B 見送る
A	買う	$-50,\ -100$	$-100,\ 0$
A	見送る	$0,\ -200$	$100,\ 0$

利得行列より，A, B の弱支配戦略はともに「見送る」。

A：「見送る」　B：「見送る」　(答)

問題 3.8.

(1) G_A と G_B のナッシュ均衡点はどちらも (U, L) と (D, R) である。

(i) G_A, G_B の均衡点がともに (U, L) のとき，プレイヤー 1 の最適な選択を G_A を選ぶことである。

(ii) G_A の均衡点が (U, L)，G_B の均衡点が (D, R) のとき，プレイヤー 1 の最適な選択を G_A を選ぶことである。

(iii) G_A の均衡点が (D, R)，G_B の均衡点が (U, L) のとき，プレイヤー 1 の最適な選択を G_B を選ぶことである。

(iv) G_A, G_B の均衡点がともに (D, R) のとき，プレイヤー 1 の最適な選択を G_A を選ぶことである。

プレイヤー 1 の戦略を

(ゲームの選択，G_A における選択，G_B における選択)

プレイヤー 2 の戦略を

(G_A における選択，G_B における選択)

のように表記すると，部分ゲーム完全均衡点は次の 4 つである。

プレイヤー 1	**(A, U, U)**	**(A, U, D)**	**(B, D, U)**	**(A, D, D)**
プレイヤー 2	**(L, L)**	**(L, R)**	**(R, L)**	**(R, R)**

(答)

(2) ２段階ゲームの既約戦略形表現は次のとおり。

	(L, L)	(L, R)	(R, L)	(R, R)
(A, U)	$3, 1$	$3, 1$	$0, 0$	$0, 0$
(A, D)	$0, 0$	$0, 0$	$1, 3$	$1, 3$
(B, U)	$2, 1$	$-1, 0$	$2, 1$	$-1, 0$
(B, D)	$-1, 0$	$0, 3$	$-1, 0$	$0, 3$

弱支配される戦略を次の過程で逐次削除する。

Step 1. (B, D) は (A, U) に弱支配されるので削除。

Step 2. (R, R) は (R, L) に弱支配されるので削除。

Step 3. (L, R) は (L, L) に弱支配されるので削除。

Step 4. (A, D) は (B, U) に支配されるので削除。

Step 5. (R, L) は (L, L) に弱支配されるので削除。

Step 6. (B, U) は (A, U) に弱支配されるので削除。

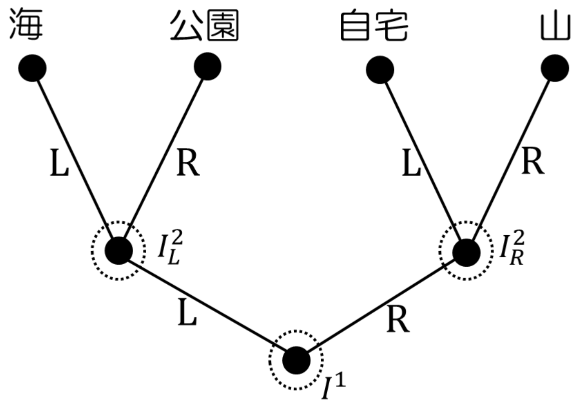
この過程で残る戦略の組は ((A, U), (L, L)) だけである。

プレイヤー 1：(A, U)　プレイヤー 2：(L, L)（答）

コメント：弱支配される戦略の逐次削除で残った「プレイヤー 1 ：(A, U)，プレイヤー 2 ：(L, L)」の戦略の組は前向き帰納法による説明ができる。まず，G_A のナッシュ均衡点は (U, L) と (D, R) で，均衡利得は $(3, 1)$ と $(1, 3)$ である。つまり，プレイヤー 1 が G_A を選んだ場合，ナッシュ均衡点によるとプレイヤー 1 は U を選択することも，D を選択することも考えられる。一方，G_B は G_A からプレイヤー 1 の利得を 1 だけ減らすことによって得られるゲームである。プレイヤー 1 が G_B を選択したときのナッシュ均衡点は (U, L) のみで，均衡利得は $(2, 1)$ であるので，プレイヤー 1 は自ら利得を放棄することによって（“burning money”），利得 2 を実現できる。それに対して，弱支配される戦略の逐次削除で残った戦略の組ではプレイヤー 1 は G_A を選び，かつ，自分に有利な均衡点 (U, L) を実現することに成功している。その均衡点では，プレイヤー 2 は「合理的なプレイヤー 1 は G_B を選択して利得を放棄し，2 の利得を得ることができたにもかかわらず，それをせず G_A を選択したということは，3 の利得を与えるナッシュ均衡点 (U, L) を実現するために戦略 U を選択するに違いない」と予想するのが合理的である，という前向き帰納法による推論をたてることができる。

問題 3.9.

(1) ゲームの木（意思決定の木）は以下の図のとおり。



(2) ゲームの木において，ドライバーの情報集合は，「分岐 1 （I^1）」，「分岐 1 で L が選ばれた後の分岐 2 （I_L^2）」，「分岐 1 で R が選ばれた後の分岐 2 （I_R^2）」の 3 つである。ドライバーの純戦略を次のように表記することにしよう。

$$(I^1 \text{ での行動}, (I_L^2 \text{ での行動}, I_R^2 \text{ での行動})).$$

この表記法に従ってドライバーの純戦略をすべて列挙すると

$$(L,(L,L)),\ (L,(L,R)),\ (L,(R,L)),\ (L,(R,R)),$$
$$(R,(L,L)),\ (R,(L,R)),\ (R,(R,L)),\ (R,(R,R))$$

の 8 通りある。

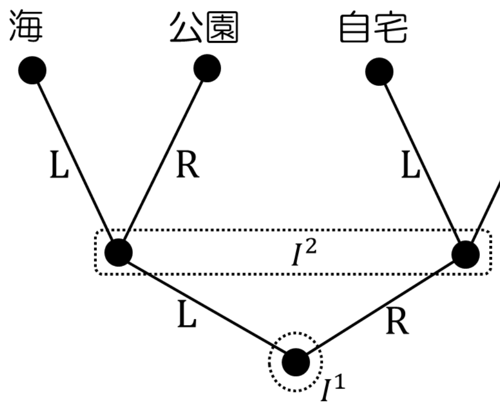
(3) 確率 2/3 で $(L,(L,R))$，確率 1/3 で $(R,(L,R))$ を選択する混合戦略は題意をみたす（他にも存在する）。

(4) I^1 において L を選ぶ確率を p，I_L^2 において L を選ぶ確率を q_L，I_R^2 において L を選ぶ確率を q_R とすると，求める行動戦略は

$$(p,q_L,q_R)=\left(\frac{2}{3},1,0\right)$$

である。

(5) ドライバーの記憶が不完全であるとき，情報集合は「分岐 1 （I^1）」と「分岐 2 （I^2）」の 2 つだけである。



この状況でのドライバーの純戦略を，（I^1 での行動, I^2 での行動）のように表記する。「確率 2/3 で (L, L)，確率 1/3 で (R, R) を選択する」という混合戦略は，あきらかに題意をみたす。一方，行動戦略で題意をみたすものは存在しない。なぜなら，I^1 において L を選ぶ確率を p，I^2 において L を選ぶ確率を q とすると，行動戦略 (p,q) が選ばれたときの各地への到着確率は下の表で与えられる。海と山に正の確率で到着するためには，$0<p,q<1$ でなければならないが，その場合，公園と自宅にも正の確率で到着してしまうことになるからである。

海	公園	自宅	山
pq	$p(1-q)$	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

コメント：純戦略を確率的に選択する混合戦略と，各情報集合での行動を確率的に選択する行動戦略とは，一般には異なる概念である。完全記憶ゲームでは，混合戦略と行動戦略とでは本質的な差がないことが知られている。

第 4 章

繰り返しゲーム

問題 4.1.

(1) プレイヤー 2 はトリガー戦略であるとする。プレイヤー 1 もトリガー戦略に従うとき，割引総利得は

$$4 + 4\delta + 4\delta^2 + \cdots = \frac{4}{1-\delta}.$$

プレイヤー 1 がトリガー戦略に従わず，1 回目に D をプレイしたときに得られる割引総利得は高々

$$5 + \delta + \delta^2 + \cdots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}.$$

プレイヤー 1 がトリガー戦略に従うことが最適となるのは

$$\frac{4}{1-\delta} \geqq 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

すなわち

$$\delta \geqq \frac{1}{4}$$

のときである。

$\boldsymbol{\delta \geqq \frac{1}{4}}$ **（答）**

(2) プレイヤー 1 はトリガー戦略であるとする。プレイヤー 2 もトリガー戦略に従うとき，割引総利得は

$$3 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = \frac{3}{1-\delta}.$$

プレイヤー 1 がトリガー戦略に従わず，1 回目に D をプレイしたときに得られる割引総利得は高々

$$4 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots = 4 + \frac{2\delta}{1-\delta}.$$

プレイヤー 1 がトリガー戦略に従うことが最適となるのは

$$\frac{3}{1-\delta} \geqq 4 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

すなわち

$$\delta \geqq \frac{1}{2}$$

のときである。

$\boldsymbol{\delta \geqq \frac{1}{2}}$（答）

(3) どちらのプレイヤーも，相手がトリガー戦略であるとき自分もトリガー戦略に従うことが最適となるのは

$$\delta \geqq \frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad \delta \geqq \frac{1}{2}$$

すなわち

$$\delta \geqq \frac{1}{2}$$

のときである。

$\boldsymbol{\delta \geqq \frac{1}{2}}$（答）

問題 4.2.

(1) 共同利潤を総生産量 y の式で表すと

$$py - y = (-y + 13)y - y = -y^2 + 12y$$

となる。これを最大にする総生産量は

$$y^m = 6$$

である。このときの市場価格は $p = -6 + 13 = 7$ である。

6 単位（答）

(2) 各企業の生産量を y_1, y_2 とすると，企業 1 の最適反応関数は

$$y_1 = \frac{12 - y_2}{2}$$

企業 2 の最適反応関数は

$$y_2 = \frac{12 - y_1}{2}$$

である。ナッシュ均衡点は

$$(y_1, y_2) = (4, 4)$$

である。このときの市場価格は $p = -(4 + 4) + 13 = 5$ である。

企業 1：4 単位　企業 2：4 単位（答）

(3) 2 企業が $\frac{y^m}{2} = 3$ を生産したときの利潤は

$$7 \times 3 - 1 \times 3 = 18$$

である。2 企業がトリガー戦略にしたがってプレイしたときの割引総利得は

$$18+18\delta+18\delta^2+\cdots=\frac{18}{1-\delta}$$

である。企業 j がトリガー戦略であるとき，企業 i がトリガー戦略以外をプレイして得ることができる最大利得は

$$\frac{81}{4}+16\delta+16\delta^2+\cdots=\frac{81}{4}+\frac{16\delta}{1-\delta}$$

である（ただし $i\neq j$）。どちらの企業もトリガー戦略から逸脱するインセンティブがないのは

$$\frac{18}{1-\delta}\geqq\frac{81}{4}+\frac{16\delta}{1-\delta}$$

すなわち

$$\delta\geqq\frac{9}{17}$$

のときである。

$$\boldsymbol{\delta\geqq\frac{9}{17}}\quad\textbf{（答）}$$

問題 4.3. $T=1$ のときは繰り返しのないゲームなので，その唯一のナッシュ均衡点は（D, D）である。

$T=k$ のとき題意が成り立つと仮定して，$T=k+1$ の場合を考える（$k\geqq 1$）。2 回目から始まる部分ゲームは k 回繰り返しゲームなので，仮定より，毎回（D, D）がプレイされる。つまり，1 回目の選択が 2 回目以降のゲームの結果に影響を与えないので，1 回目も（D, D）がプレイされる。

数学的帰納法より，題意が成立することが示された。

問題 4.4. 成分ゲームにおいて，どちらのプレイヤーも D が支配戦略である。したがって，成分ゲームのナッシュ均衡点は（D, D）のみである。

(1) **正：** 相手の戦略が「プレイの履歴によらず毎回 D をプレイする」であるとき，どの回でも D 以外をプレイすることでより高い利得を得ることはできないので，自分も「プレイの履歴によらず毎回 D をプレイする」ことが（繰り返しゲーム全体における）最適応答である。このことは割引因子の大きさに依存しない。(⇒ 演習 4.4 参照)

(2) **正：** $\delta\geqq\frac{5}{7}$ のとき，トリガー戦略の組は繰り返しゲームのナッシュ均衡点となる。この均衡点では，毎回（C, C）がプレイされることになる。(⇒ 演習 4.1 参照)

(3) **誤：**繰り返す回数が有限であるとき，後ろ向き帰納法から導かれる戦略は，どちらのプレイヤーも「毎回 D をプレイする」ものしかない。(⇒ 練習問題 4.3 参照)

(4) **正：**プレイの履歴によらず毎回 D をプレイする戦略はいかなる部分ゲームのナッシュ均衡点でもある。

問題 4.5.

(1) どちらのプレイヤーもお返し戦略であるとき，毎回 (C, C) がプレイされるので，割引総利得は

$$8+8\delta+8\delta^2+\cdots=\boldsymbol{\frac{8}{1-\delta}}\quad\textbf{（答）}$$

(2) 題意のような戦略に従った場合，1 回目は (D, C)，2 回目は (C, D)，3 回目以降は (C, C) が繰り返しプレイされる。このときの割引総利得は

$$10 + 4\delta + 8\delta^2 + 8\delta^3 + \cdots = \boldsymbol{10 + 4\delta + \frac{8\delta^2}{1-\delta}} \quad \textbf{（答）}$$

(3) 題意のような戦略に従った場合，1 回目は (D, C)，2 回目は (D, D)，3 回目は (C, D)，4 回目以降は (C, C) が繰り返しプレイされる。このときの割引総利得は

$$10 + 5\delta + 4\delta^2 + 8\delta^3 + 8\delta^4 \cdots = \boldsymbol{10 + 5\delta + 4\delta^2 + \frac{8\delta^3}{1-\delta}} \quad \textbf{（答）}$$

(4) k 回目までは D，$k+1$ 回目は C，$k+2$ 回目からはお返し戦略にしたがってプレイしたときの割引総利得を S_k とすると

$$S_k = 10 + 5\delta + \cdots + 5\delta^{k-1} + 4\delta^k + \frac{8\delta^{k+1}}{1-\delta}$$

である。ここで

$$S_k - S_{k+1} = 4\delta^k\left(\delta - \frac{1}{4}\right)$$

より，$\delta \geqq \frac{1}{4}$ のとき

$$S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots$$

である。つまり

$$8 + 8\delta + 8\delta^2 + \cdots \geqq S_1 = 10 + 4\delta + 8\delta^2 + 8\delta^3 + \cdots$$

をみたす δ の範囲を求めればよい。

$$8 + 8\delta \geqq 10 + 4\delta$$

より

$$\delta \geqq \frac{1}{2}$$

である。

$$\boldsymbol{\delta \geqq \frac{1}{2}} \quad \textbf{（答）}$$

問題 4.6.

(1) プレイヤー 1 にとって，T は支配戦略である。プレイヤー 1 の戦略 T に対する，プレイヤー 2 の最適応答は R である。したがって，ナッシュ均衡点は（T, R）のみである。

（T, R）（答）

(2) 　プレイヤー 2 が L のとき，プレイヤー 1 は T を選ぶと最大利得 3 を得る。プレイヤー 2 が R のとき，プレイヤー 1 は T を選ぶと最大利得 1 を得る。プレイヤー 1 の最大利得を最小にするには，プレイヤー 2 は R を選べばよい。すなわち，プレイヤー 1 のミニマックス利得は 1 である。

　プレイヤー 1 が T のとき，プレイヤー 2 は R を選ぶと最大利得 5 を得る。プレイヤー 2 が B のとき，プレイヤー 2 は L でも R でも利得 1 を得る。プレイヤー 2 の最大利得を最小にするには，プレイヤー 1 は B を選べばよい。すなわち，プレイヤー 2 のミニマックス利得は 1 である。

どちらのプレイヤーも 1（答）

(3)　均衡プレイが「毎回（T, L)」となるような戦略の組を構成する。プレイヤー 1 の戦略として次のようなトリガー戦略を考える。

- 1 回目は T をプレイする。
- $t-1$ 回目まで（T, L）がプレイされていると，t 回目は T をプレイする。$t-1$ 回目までに 1 回でも（T, L）以外がプレイされたとき，t 回目以降ずっと B をプレイする。

プレイヤー 2 の戦略は「毎回 L をプレイする」であるとする。

$\delta \geqq 0.5$ のとき，この戦略の組は繰り返しゲームのナッシュ均衡点である

ことを示す。

プレイヤー 1 がトリガー戦略であるとする。プレイヤー 2 が毎回 L をプレイするとき，プレイヤー 2 の割引総利得は

$$3 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots$$

である。もしプレイヤー 2 が t 回目にはじめて L 以外をプレイしたとすると，プレイヤー 1 は $t+1$ 回目以降ずっと B をプレイするので，プレイヤー 2 の各回で得られる利得は高々 1 である。このときプレイヤー 2 の割引総利得は

$$3 + 3\delta + 3\delta^{t-1} + 5\delta^t + \delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots$$

である。つまり，「毎回 L をプレイする」から逸脱したことによる割引総利得の増加分は高々

$$\begin{aligned}
&(5\delta^t + \delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots) - (3\delta^t + 3\delta^{t+1} + 3\delta^{t+2} + \cdots) \\
&= \delta^t(5 + \delta + \delta^2 + \cdots) - \delta^t(3 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots) \\
&= \delta^t \left\{ 5 + \frac{\delta}{1-\delta} - \frac{3}{1-\delta} \right\} = \delta^t \frac{2-4\delta}{1-\delta}
\end{aligned}$$

である。これより

$$\delta^t \frac{2-4\delta}{1-\delta} \leqq 0$$

すなわち

$$\delta \geqq 0.5$$

であるとき，プレイヤー 2 は「毎回 L をプレイする」ことから逸脱しても割引総利得を増加させるこはできない。これは，$\delta \geqq 0.5$ のとき，「毎回 L をプレイする」はトリガー戦略に対する最適応答であることを意味する。

一方，プレイヤー 2 の戦略が「毎回 L をプレイする」であるとき，明らかにプレイヤー 1 は毎回 T をプレイすることが（δ の値によらず）最適である。したがって，トリガー戦略は「毎回 L をプレイする」に対する最適応答である。

第 5 章

不確実な相手とのゲーム

問題 5.1. P の戦略を各タイプの行動を並べて次のように表記する。

(A タイプの行動, B タイプの行動)

(i) P の最適応答

S の戦略が「協調」のとき，どちらのタイプも最適応答は「参入する」である。S の戦略が「対立」のとき，どちらのタイプも最適応答は「参入しない」である。

(ii) S の最適応答

P の戦略が（参入する, 参入する）のとき，「協調」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$$

「対立」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times (-2) = -\frac{3}{2}$$

であるから，S の最適応答は「協調」である。

P の戦略が（参入する, 参入しない）のとき，「協調」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$$

「対立」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$$

であるから，S の最適応答は「協調」である。

P の戦略が（参入しない, 参入する）のとき，「協調」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 0 = 1$$

「対立」の期待利得は

$$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times (-2) = 0$$

であるから，S の最適応答は「協調」である。

P の戦略が（参入しない, 参入しない）のとき，S の戦略がどちらであっても利得は 2 であるから，どちらの戦略も最適応答である。

(iii) ベイジアン均衡点

S の戦略が「協調」であるとき，これに対する P の最適応答は (参入する, 参入する) である。P の戦略 (参入する, 参入する) に対して，S の最適応答は「協調」である。つまり戦略の組 ((参入する, 参入する), 協調) はベイジアン均衡点である。

S の戦略が「対立」であるとき，これに対する P の最適応答は (参入しない, 参入しない) である。P の戦略 (参入しない, 参入しない) に対して，「対立」は最適応答である。つまり戦略の組 ((参入しない, 参入しない), 対立) はベイジアン均衡点である。

以上より，このゲームのベイジアン均衡点は次の 2 つである。

	均衡点 (I)	**均衡点 (II)**
A タイプの P	**参入する**	**参入しない**
B タイプの P	**参入する**	**参入しない**
S	**協調**	**対立**

(答)

問題 5.2. P の戦略を各タイプの行動を並べて次のように表記する。

（A タイプの行動, B タイプの行動）

P が A タイプである条件付き確率（既存企業の信念）を r であらわす。

(i) P の戦略が (参入する, 参入する) のとき, S の整合的な信念は $r = 0.5$ である。この信念の下で,「協調」の期待利得は $0.5\times1+0.5\times0 = 0.5$ であり,「対立」の期待利得は $0.5\times(-1)+0.5\times(-2) = -1.5$ であるから，最適応答は「協調」である。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入する）である。

(ii) P の戦略が（参入する, 参入しない）のとき，S の整合的な信念は $r = 1$ である。この信念の下で,「協調」の利得は 1 であり，「対立」の利得は -1 であるから，最適応答は「協調」である。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入する）である。したがって，P の戦略（参入する, 参入しない）と S の戦略「協調」は整合的な信念の下でナッシュ均衡点とはならない。

(iii) P の戦略が（参入しない, 参入する）のとき，S の整合的な予想は $r = 0$ である。この信念の下で,「協調」の利得は 0 であり，「対立」の利得は -2 であるから，最適応答は「協調」である。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入する）である。したがって，P の戦略（参入しない, 参入する）と S の戦略「協調」は整合的な信念の下でナッシュ均衡点とはならない。

(iv) P の戦略が（参入しない, 参入しない）のとき，どんな r でも整合的である。どんな r の値であっても最適応答は「協調」となる。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入する）である。したがって，P の戦略（参入しない, 参入しない）と S の戦略「協調」は整合的な信念のもとでナッシュ均衡点とはならない。

以上より，このゲームの完全ベイジアン均衡点は

P の戦略 **A タイプ：参入する**
B タイプ：参入する
S の戦略：協調
S の信念：$r = 0.5$ **（答）**

コメント： 問題 5.1 のゲームは，本問の展開形ゲームを利得行列で表現したものである。問題 5.1 でみたように，このゲームには 2 つのベイジアン均衡点がある。均衡点 (I) は，$r = 0.5$ という信念の下で，完全ベイジアン均衡点を構成する。一方，均衡点 (II) は，いかなる信念の下でも，完全ベイジアン均衡点とはならない。

問題 5.3. P の戦略を各タイプの行動を並べて次のように表記する。

（A タイプの行動, B タイプの行動）

P が A タイプである条件付き確率（既存企業の信念）を r であらわす。

(1) P の戦略が（参入する, 参入しない）のとき，S の整合的な信念は $r = 1$ である。この信念の下で，「協調」の利得は 1 であり，「対立」の利得は 0 であるから，最適応答は「協調」である。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入しない）である。

P の戦略が（参入しない, 参入する）のとき，S の整合的な予想は $r = 0$ である。この信念の下で，「協調」の利得は -1 であり，「対立」の利得は 0 であるから，最適応答は「対立」である。S の戦略が「対立」のとき，P の最適応答は（参入しない, 参入しない）である。したがって，P の戦略（参入しない, 参入する）と S の戦略「対立」は整合的な信念の下でナッシュ均衡点とはならない。

[分離均衡]
P の戦略 **A タイプ：参入する**
B タイプ：参入しない **（答）**
S の戦略：協調
S の信念：$r = 1$

P の戦略が（参入する, 参入する）のとき，S の整合的な信念は $r = 0.9$ である。この信念の下で，「協調」の期待利得は $0.9 \times 1 + 0.1 \times (-1) = 0.8$ であり，「対立」の期待利得は $0.9 \times 0 + 0.1 \times 0 = 0$ であるから，最適応答は「協調」である。S の戦略が「協調」のとき，P の最適応答は（参入する, 参入しない）である。したがって，P の戦略（参入する, 参入する）と S の戦略「協調」は整合的な信念の下でナッシュ均衡点とはならない。

P の戦略が（参入しない, 参入しない）のとき，どんな r でも整合的である。信念 r の下で，「協調」の期待利得は $r \times 1 + (1-r) \times (-1) = 2r - 1$ であり，「対立」の期待利得は $r \times 0 + (1-r) \times 0 = 0$ である。$2r - 1 \leqq 0$ すなわち $r \leqq 0.5$ のとき，「対立」が最適応答となる。S の戦略が「対立」のとき，P の最適応答は（参入しない, 参入しない）である。

[一括均衡]

P の戦略　**A タイプ：参入しない**
B タイプ：参入しない　　**（答）**

S の戦略：対立

S の信念：$r \leqq 0.5$

(2) 一括均衡において，A タイプの P が「参入する」に行動を変えたとき，S が「協調」を選べば，A タイプの利得は 1 である。これは，均衡利得 0 よりも大きい。一方，B タイプが「参入する」に行動を変えても，得られる利得は最大でも 0 である。これは，均衡利得 1 よりも小さい。つまり，A タイプのほうが B タイプよりも「参入する」に行動を変えるインセンティブが強い。このことから，「参入する」を選ぶのは A タイプである可能性が高いと考えられる。しかし，一括均衡における S の信念では，B タイプのほうが「参入する」を選ぶ確率が高いと想定されている。

問題 5.4.

(1) $p \leqq 1000$ であるとき，どちらのタイプの読者も小説を購入する。

40 万部（答）

(2) $1000 < p \leqq 5000$ であるとき，熱狂的なファンだけが小説を購入する。

10 万部（答）

(3) $p > 5000$ であるとき，どちらのタイプの読者も小説を購入しない。

0 部（答）

(4) (1)〜(3) を前提として，出版社の価格設定を考える。$p = 1000$ のとき，出版社の売上収入は

$$1000 \times 40 \text{ 万} = 4 \text{ 億円}$$

$p = 5000$ のとき，出版社の売上収入は

$$5000 \times 10 \text{ 万} = 5 \text{ 億円}$$

$p > 5000$ のときは販売部数は 0 なので，売上収入も 0 である。よって，出版社にとって最適な価格は $p = 5000$ である。

出版社：　$p = 5000$ **円に設定**
熱狂的なファン：　$p \leqq 5000$ **のときのみ購入する**　　**（答）**
ファン以外の読者：　$p \leqq 1000$ **のときのみ購入する**

問題 5.5. I_1, I_2 において，「学生が H タイプである」確率（信念）をそれぞれ r_1, r_2 とする。

(1) 　学生の戦略が，H タイプは「取得する」，L タイプは「取得しない」であるとする。このとき，I_1 における整合的な信念は $r_1 = 1$ である。この信念の下で，企業が「採用する」を選んだときの利得は 2，「採用しない」を選んだときの利得は 0 であるから，「採用する」を選ぶのが最適である。

I_2 における整合的な信念は $r_2=0$ である。この信念の下で，企業が「採用する」を選んだときの利得は -1,「採用しない」を選んだときの利得は 0 であるから,「採用しない」を選ぶのが最適である。すなわち，企業の最適応答は「資格をもつ学生のみを採用する」である。

企業の戦略が「資格をもつ学生のみを採用する」であるとき，H タイプは「取得する」，L タイプは「取得しない」が最適応答である。

以上より，次の戦略と信念の組は完全ベイジアン均衡点である。

学生の戦略　H タイプ：資格を取得する
L タイプ：資格を取得しない
企業の戦略：資格をもつ学生のみを採用する　**(答)**
企業の信念：$r_1=1$，$r_2=0$

(2)　学生の戦略が，どちらのタイプも「取得しない」であるとする。このとき，I_2 における整合的な信念は $r_2=0.25$ であり，この信念の下で,「採用する」の期待利得は $0.25\times1+0.75\times(-1)=-0.5$ であり,「採用しない」の利得は 0 であるから，I_2 では「採用しない」が最適である。一方，I_1 における信念は任意である。信念 r_1 の下で,「採用する」の期待利得は $r_1\times2+(1-r_1)\times(-1)=3r_1-1$ であり，「採用しない」の利得は 0 である。$3r_1-1\leqq0$，すなわち $r_1\leqq\frac{1}{3}$ のとき，「採用しない」が最適である。

企業の戦略が「I_1 でも I_2 でも採用しない」であるとき，どのタイプの学生も「取得しない」を選ぶことが最適応答である。したがって，次の戦略と信念の組は完全ベイジアン均衡点である。

学生の戦略　H タイプ：資格を取得しない
L タイプ：資格を取得しない
企業の戦略：すべての学生を採用しない　**(答)**
企業の信念：$r_1\leqq\frac{1}{3}$，$r_2=0.25$

(3)　企業の戦略が「資格をもつ学生のみを採用する」であるとき，どちらのタイプも「取得する」が最適応答である。つまり，(1) のような分離均衡は存在しない。このゲームの完全ベイジアン均衡点は，(2) の一括均衡のみである。

問題 5.6. 買い手は，どのような信念であっても，110 を超える価格を提示されたなら No を選択し，50 以下の価格を提示されたら Yes を選択することが最適である。

(1)　売り手の提示価格が q^P であるとき，買い手の整合的な信念は「売り手は 100%P タイプ」である。この信念のもとで，Yes の利得は $110-q^P\geqq0$ であるから，最適な行動は Yes を選ぶことである。

(2)　(1) の状況で，L タイプが q^L を提示したとき，買い手は「売り手は 100%L タイプ」と予想するので，この信念の下で買い手の最適な選択は Yes であるから，L タイプの利得は q^L-40 である。一方，L タイプが提示価格を q^P とすれば，(1) より，買い手は Yes を選択することがわかるから，L タイプの利得は q^P-40 となる。これは q^L を提示した場合よりも高い。よって，q^L は最適ではない。

(3)　$q^* = q^P = q^L$ とおく。提示価格が q^* であるとき，買い手の整合的な信念は，P タイプである確率が 80%，L タイプである確率が 20% である。このとき，Yes の期待利得は $0.8 \times (110 - q^*) + 0.2 \times (50 - q^*) = 98 - q^*$ である。No の利得は 0 であるから，$q^* \leqq 98$ のときのみ Yes を選択する。

$q^* \leqq 98$ ならば，P タイプの売り手の利得は最大で -2 である。P タイプは 110 を超える価格を提示することによって 0 の利得を得ることできる。つまり，$q^P = q^*$ は買い手の行動に対する最適応答とはなり得ない。

$q^* > 98$ ならば，買い手は No を選択するので，売り手および買い手の利得は 0 である。しかし，L タイプは価格 50 を提示することによって $50 - 40 = 10$ の利得を得ることできる。つまり，$q^L = q^*$ は買い手の行動に対する最適応答とはなり得ない。

以上より，どちらのタイプも同一の価格を提示するような完全ベイジアン均衡点は存在しない。

(4)　$q^L = 50$ とし, q^P を 110 を超える（$q^P > 110$）任意の値とする。次のようなプレイヤー 2 の信念を考える。

- q^P 以上の価格が提示されたら，確率 1 で P タイプ。
- q^P 未満の価格が提示されたら，確率 1 で L タイプ。

この信念はプレイヤー 1 の戦略と整合的である。この信念の下で，買い手の最適応答を考える。q^P が提示されたとき，$q^P > 110$ であるから，買い手は No を選ぶことが最適である。q^P とは異なる q が提示されたとき，$q \leqq 50$ のときのみ買い手は Yes を選ぶことが最適となる。

この買い手の行動に対して，P タイプは q^P 以外の価格を提示しても 0 以上の利得を得ることはできないので，q^P を提示することは最適応答である。一方，L タイプの利得は，提示価格 q が 50 以下であれば $q - 40$，$q > 50$ であれば 0 であるから，$q = 50$ を提示することが最適応答となる。以上より，題意をみたす完全ベイジアン均衡点が構成された。

問題 5.7.

(1) インセンティブ両立条件は

$$0.6 \times (b + 9 - 5) + 0.4 \times (9 - 5) \geqq 9$$

すなわち

$$b \geqq \frac{25}{3}$$

である。一方，参加条件は

$$0.6 \times (b + 9 - 5) + 0.4 \times (9 - 5) \geqq 16$$

すなわち

$$b \geqq 20$$

である。両方の条件をみたすのは $b \geqq 20$ のときであり，花子さんの期待支払額が最小となるのは $b = 20$ のときである。

b =20 万円（答）

(2) インセンティブ両立条件は

$$0.8 \times (b + 9 - 9) + 0.2 \times (9 - 9) \geqq 9$$

すなわち

$$b \geqq \frac{45}{4}$$

である。一方，参加条件は

$$0.8 \times (b + 9 - 9) + 0.2 \times (9 - 9) \geqq 16$$

すなわち

$$b \geqq 20$$

である。両方の条件をみたすのは $b \geqq 20$ のときであり，花子さんの期待支払額が最小となるのは $b = 20$ のときである。

b =20 万円（答）

(3) インセンティブ両立条件は

$$0.8 \times (5\sqrt{b+9} - 5) + 0.2 \times (5\sqrt{9} - 5) \geqq 5\sqrt{9}$$

すなわち

$$\sqrt{b+9} \geqq \frac{17}{4}$$

である。両辺を 2 乗して整理すると

$$b \geqq \frac{145}{16} = 9.0625$$

となる。一方，参加条件は

$$0.8 \times (5\sqrt{b+9} - 5) + 0.2 \times (5\sqrt{9} - 5) \geqq 5\sqrt{16}$$

すなわち

$$\sqrt{b+9} \geqq \frac{11}{2}$$

である。両辺を 2 乗して整理すると

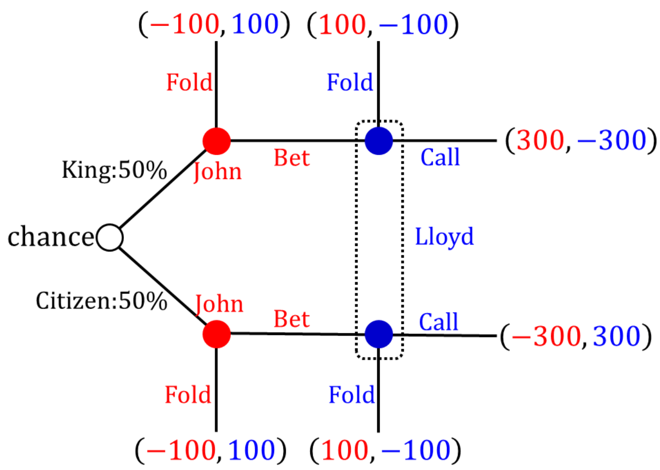
$$b \geqq \frac{85}{4} = 21.25$$

である。両方の条件をみたすのは $b \geqq 21.25$ のときであり，花子さんの期待支払額が最小となるのは $b = 21.25$ のときである。

b =21 万 2500 円（答）

問題 5.8.

(1) ゲームの木は以下の図のようになる。図の利得ベクトルは，左側の数値が John の利得，右側の数値が Lloyd の利得を表す。



(2) 以下の 2 つの利得行列を考える。左は John のカードが King のケース，右は John のカードが Citizen のケースに対応する。John はどちらのゲーム（利得行列）がプレイされているか知った上で，Bet か Fold かを選ぶ。Lloyd はどちらがプレイされているかについては確率的にしか知らない状況で，Call か Fold かを選ぶ。

King: 50%

		Lloyd	
		Call	Fold
John	Bet	$300, -300$	$100, -100$
	Fold	$-100, 100$	$-100, 100$

Citizen: 50%

		Lloyd	
		Call	Fold
John	Bet	$-300, 300$	$100, -100$
	Fold	$-100, 100$	$-100, 100$

(3) カードが King であるとき，John にとって Bet が支配戦略であるので，John は Bet を選ぶものとする。カードが Citizen であるときに John が Bet を選ぶ確率を p とする。Lloyd が Call を選ぶ確率を q とする。

　Lloyd の混合戦略が $(q, 1-q)$ であるとする。カードが Citizen であるときの John が Bet を選んだときの期待利得は

$$(-300) \times q + 100 \times (1-q) = -400q + 100$$

であり，Fold を選んだときの利得は -100 である。カードが Citizen であるときの John の最適応答は次のようになる。

$$\begin{aligned}
q < \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow p = 1, \\
q > \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow p = 0, \\
q = \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow 0 \leqq p \leqq 1.
\end{aligned}$$

　カードが Citizen であるときの John の混合戦略が $(p, 1-p)$ であるとする。Lloyd が Call を選んだときの期待利得は

$$\frac{1}{2} \times (-300) + \frac{1}{2} \times [300 \times p + 100 \times (1-p)] = 100p - 100$$

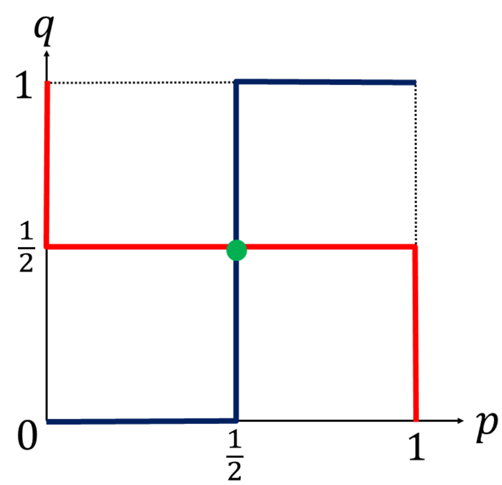
であり，Fold を選んだときの期待利得は

$$\frac{1}{2} \times (-100) + \frac{1}{2} \times [(-100) \times p + 100 \times (1-p)] = -100p$$

である。Lloyd の最適応答は次のようになる。

$$\begin{aligned} p < \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow q = 0, \\ p > \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow q = 1, \\ p = \frac{1}{2}\text{のとき} &\Longrightarrow 0 \leqq q \leqq 1. \end{aligned}$$

John と Lloyd の最適応答グラフは次のようになる。



グラフより，このゲームの混合戦略均衡点は

$$p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$$

である。

ジョン： $\begin{cases} \textbf{King のときは，確実に Bet} \\ \textbf{Citizen のときは，確率 50\% で Bet，確率 50\% で Fold} \end{cases}$ **（答）**

ロイド：確率 50% で Call，確率 50% で Fold

第 6 章

交渉ゲーム

問題 6.1.

(1) A に 4000 円，B に 2000 円を配分すると，残額は 4000 円である。これを 2 人で等分すると，1 人 2000 円である。A への配分額は $4000 + 2000 = 6000$ 円，B への配分額は $2000 + 2000 = 4000$ 円である。

A：6000 円　B：4000 円（答）

(2) A に 1000 円，B に 3000 円を配分すると，残額は 6000 円である。これを 2 人で等分すると，1 人 3000 円である。A への配分額は $1000 + 3000 = 4000$ 円，B への配分額は $3000 + 3000 = 6000$ 円である。

A：4000 円　B：6000 円（答）

問題 6.2. ウォズをプレイヤー 1，ジョブズをプレイヤー 2 とする。ウォズへの配分額を u_1，ジョブズへの配分額を u_2 とすると，実現可能は配分は

$$u_1 + u_2 \leqq 1 \text{ 億}$$

をみたす。交渉が決裂したとき，ウォズは 1000 万円の収益が得られるが，ジョブズは何も得られないので，交渉の不一致点は

$$d_1 = 1000 \text{ 万}, \quad d_2 = 0$$

である。交渉領域は

$$u_1 + u_2 \leqq 1 \text{ 億}, \quad u_1 \geqq 1000 \text{ 万}, \quad u_2 \geqq 0$$

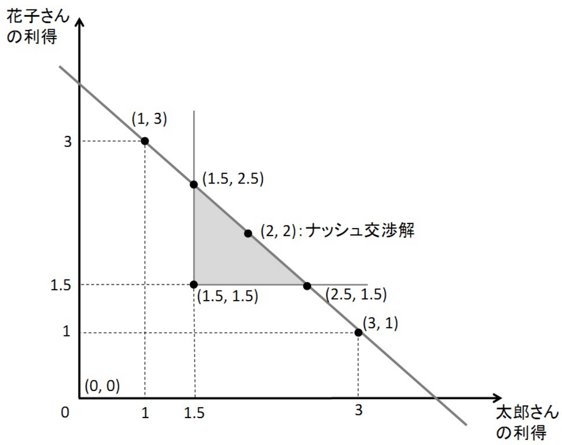
をみたす (u_1, u_2) の集合である。

交渉を成立させるためには，ウォズに少なくとも 1000 万円の収益を保証しなければならないので，これを先にウォズに配分しておく。残額 9000 万円について 2 人で交渉するとき，パレート最適性および対称性より，2 人の配分額は均等額 4500 万円である。

ウォズ：5500 万円，ジョブズ：4500 万円（答）

問題 6.3. 相関戦略によって実現可能な利得ベクトルの集合は，(太郎の純戦略，花子の純戦略) =（家事をやる，家事をやる）で実現される利得の組 (太郎の利得，花子の利得)= $(2,2)$，つまり，点 $(2,2)$，（家事をやる，家事をやらない）での点 $(1,3)$，（家事をやらない，家事をやる）での点 $(3,1)$，（家事をやらない，家事をやらない）の点 $(0,0)$ を結んだ線分で囲まれる領域で表されることになる。

図 6.1



混合戦略ナッシュ均衡点は，太郎が $\frac{1}{2}$ の確率で家事をやり，花子も $\frac{1}{2}$ の確率で家事をやる，であり，そのときの期待利得は，太郎さんが 1.5，花子さんも 1.5 である。この混合戦略ナッシュ均衡点での期待利得 $(1.5, 1.5)$ が交渉の不一致点とするので，交渉領域は，上の図のグレーの領域で表される。さらに，ナッシュ交渉解は，点 $(1.5, 2.5)$ と点 $(2.5, 1.5)$ の中点で与えられるので，$(2,2)$ となる。

ナッシュ交渉解は $(2,2)$ **（答）**

ナッシュ交渉解の利得の組 $(2,2)$ を実現する**純戦略の組は，（家事をやる，家事をやる）**である。また，**確率 $\frac{1}{2}$ で太郎さんのあたりがでて，確率 $\frac{1}{2}$ で花子さんのあたりがでるようなくじを作り，くじを引いてあたりであった方が家事を休み，もう一方が家事をやるという相関戦略**でも，ナッシュ交渉解 $(2,2)$ を実現することができる。

問題 6.4.

(1) 工場の操業停止に対応する状況が交渉の不一致点になるので，交渉の不一致点は $d=(0,0)$ で与えられる。被害が 60 億，操業による工場の利益が 100 億なので，40 億を 2 人で分け合うことになる。したがって，ナッシュ交渉解は工場の利得 $u_1^* = 20$, 住民の $u_2^* = 20$ となる。つまり，**ナッシュ交渉解では，工場が操業され，工場から住民へ 80 億円の補償が行われる。**

(2) この場合交渉の不一致点は $d=(100,0)$ となる。交渉が決裂して操業が行われる状態から操業が停止されると住民には 140 億の利益（被害の減少）があり，企業は 100 億の損失がある。したがって，40 億円の交渉の利益がある。ナッシュ交渉解は工場 $u_1^* = 120$，住民 $u_2^* = 20$ となる。つまり，**ナッシュ交渉解では，工場の操業が停止され，住民から工場へ 120 億円の補償が行われることになる。**

問題 6.5.

(1) プレイヤー i の受取額を x_i，利得（=効用）を u_i とすると，$x_i = {u_i}^2$ である（$i = 1, 2$）。実現可能な利得ベクトルは，次の条件を満たす。

$$ {u_1}^2 + {u_2}^2 \leqq 100 \text{ 万} $$

交渉の不一致点は $d_1 = \sqrt{25\text{ 万}} = 500$, $d_2 = \sqrt{4\text{ 万}} = 200$ である。交渉領域は，以下の連立不等式で表される領域である。

$$ {u_1}^2 + {u_2}^2 \leqq 100 \text{ 万},\quad u_1 \geqq 500,\quad u_2 \geqq 200 $$

(2) ナッシュ交渉解は次の最大化問題の解である。

$$ \begin{aligned} &\max(u_1 - 500)(u_2 - 200) \\ &\text{sub.to. } {u_1}^2 + {u_2}^2 \leqq 100 \text{ 万},\ u_1 \geqq 500,\ u_2 \geqq 200. \end{aligned} $$

パレート最適性より

$$ {u_1}^2 + {u_2}^2 = 100 \text{ 万} $$

が成り立つとしてよい。1 階条件より，ナッシュ交渉解は次の連立方程式の解である。

$$ \begin{aligned} u_2 - 200 &= 2\lambda u_1 \\ u_1 - 500 &= 2\lambda u_2 \\ {u_1}^2 + {u_2}^2 &= 100 \text{ 万} \end{aligned} $$

これを解くと

$$ u_1 = 800,\quad u_2 = 600,\quad \lambda = \frac{1}{4}. $$

$u_1 = 800$, $u_2 = 600$ に対応するプレイヤーの受取額は

$$ x_1 = 64 \text{ 万},\quad x_2 = 36 \text{ 万} $$

である。

プレイヤー 1：64 万円，プレイヤー 2：36 万円 （答）

問題 6.6.

(1) 実行可能な配分は以下を満たす。

$$ x_1^A + x_1^B \leqq 1,\quad x_2^A + x_2^B \leqq 1 $$

どちらのタイプの消費者も，(x_1, x_2) における限界代替率は同じで，$\frac{x_2}{x_1}$ である。実行可能な配分がパレート最適であるための条件は次のように表される。

$$ \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B},\ x_1^A + x_1^B = 1,\ x_2^A + x_2^B = 1. $$

これより

$$x_1^A = x_2^A, \quad x_1^B = x_2^B, \quad x_1^A + x_1^B = 1, \quad x_2^A + x_2^B = 1.$$

すなわち，パレート最適な配分では，どちらの消費者も各財の消費量は同じである。ここで，$x_1^A = x_2^A = t$ とおくと，$x_1^B = x_2^B = 1 - t$ であり

$$u_A = t^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} = t^{\frac{1}{2}}, \quad u_B = (1-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} = 1 - t$$

である (ただし, $0 \leqq t \leqq 1$)。したがって, パレート最適な資源配分における利得ベクトル (u_A, u_B) は以下の関係を満たす。

$$u_B = 1 - {u_A}^2 \quad (0 \leqq u_A \leqq 1).$$

交渉の不一致点は

$$d_A = 1^{\frac{1}{4}} \times 0^{\frac{1}{4}} = 0, \quad d_B = 0^{\frac{1}{2}} \times 1^{\frac{1}{2}} = 0$$

である。以上より，交渉領域は以下の不等式で表される領域である。

$${u_A}^2 + u_B \leqq 1, \quad u_A \geqq 0, \quad u_B \geqq 0.$$

(2) ナッシュ交渉解は次の最大化問題の解である。

$$\begin{aligned} &\max u_A u_B \\ &\text{sub.to. } {u_A}^2 + u_B \leqq 1, \ u_A \geqq 0, \ u_B \geqq 0. \end{aligned}$$

パレート最適性の公理より

$${u_A}^2 + u_B = 1$$

が成り立つとしてよい。1 階条件より，ナッシュ交渉解は次の連立方程式の解である。

$$\begin{aligned} &u_B = 2\lambda u_A \\ &u_A = \lambda \\ &{u_A}^2 + u_B = 1 \end{aligned}$$

これを解くと

$$u_A = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad u_B = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$u_A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $u_B = \frac{2}{3}$ に対応する配分は

$$\boldsymbol{x_1^A = x_2^A = \frac{1}{3}, \quad x_1^B = x_2^B = \frac{2}{3}} \quad \textbf{(答)}$$

コメント：この経済の競争均衡配分は $x_1^A = x_2^A = x_1^B = x_2^B = \frac{1}{2}$ である。一般に，ナッシュ交渉解に対応する配分と競争均衡配分とは異なる。

問題 6.7.

(1) 演習 6.4 コメントより，$x_n = 1 - \delta(1 - \delta x_{n-1})$ という関係が成立する。この式は

$$x_n - \frac{1}{1+\delta} = \delta^2 \left(x_{n-1} - \frac{1}{1+\delta} \right)$$

のように書き換えることができる。これより，

$$x_n - \frac{1}{1+\delta} = \delta^n \left(x_1 - \frac{1}{1+\delta} \right)$$

が得られる。演習 6.4 より，$x_1 = 1 - \delta$ であるので，

$$x_n = \frac{1 - \delta^{n+2}}{1+\delta}$$

が得られる。

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1 - \delta^{n+2}}{1+\delta}} \quad \textbf{（答）}$$

(2) $0 < \delta < 1$ であるから，n が限りなく大きくなるとき δ^{n+2} は 0 に収束する。したがって，(1) より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \delta^{n+2}}{1+\delta} = \frac{1}{1+\delta}$$

となる。

$$\boldsymbol{\frac{1}{1+\delta}} \quad \textbf{（答）}$$

問題 6.8.

(1) 定常戦略では「各プレイヤーはいつも同じ提案を行い，同じ提案の集合を受諾する」ことになる。

各プレイヤーが用いる提案が合意される定常戦略は次のような形式をとる。

ある $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, $y^* = (y_1^*, y_2^*)$, $z^* = (z_1^*, z_2^*)$, $w^* = (w_1^*, w_2^*)$ に対して，プレイヤー 1 は x^* を提案し，提案 $y = (y_1, y_2)$ を受諾する必要十分条件は $y_1 \geqq y_1^*$ である。プレイヤー 2 は z^* を提案し，提案 $w = (w_1, w_2)$ を受諾する必要十分条件は $w_2 \geqq w_2^*$ である。

定常部分ゲーム完全均衡点では，すべての提案が受諾される（合意の遅れが存在しない）ので，$x_2^* \geqq w_2^*$ かつ $z_1^* \geqq y_1^*$ である。しかしながら，強い不等式 $>$ の場合には，提案者は受諾される範囲内で相手への提案額を減らして自分の利得を増やすことができるので，等式，つまり，$x_2^* = w_2^*$ かつ $z_1^* = y_1^*$ でなければならない。

したがって，**戦略の組は**

プレイヤー 1 は x^* を提案し，提案 y を受諾する必要十分条件は $y_1 \geqq y_1^*$ である。プレイヤー 2 は y^* を提案し，提案 x を受諾する必要十分条件は $x_2 \geqq x_2^*$ である。

と書き換えられる。この戦略の組を $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ とおく。

最初の交渉ラウンドでプレイヤー 1 の提案に対してプレイヤー 2 が応答するところから始まる部分ゲームを考える。プレイヤー 2 が提案を拒否した場合，次のラウンドでプレイヤー 2 の提案 y^* が受諾されるので，プレイヤー 2 の最適戦略は，$x_2 < \delta y_2^*$ であれば x を拒否をし，$x_2 > \delta y_2^*$ であれば x を受諾し，$x_2 = \delta y_2^*$ であれば，受諾と拒否が無差別になる。

したがって，部分ゲーム完全均衡点であれば $x_2^* = \delta y_2^*$ である。

同様にして，$y_1^* = \delta x_1^*$ が成り立つ。$x_2^* = 100 - x_1^*$ かつ $y_2^* = 100 - y_1^*$ であるので，二つの式を解けば，

$$x_1^* = \frac{100}{1+\delta},$$
$$y_1^* = \frac{100\delta}{1+\delta}$$

となる。したがって，

$$x^* = \left(\frac{100}{1+\delta}, \frac{100\delta}{1+\delta}\right),$$
$$y^* = \left(\frac{100\delta}{1+\delta}, \frac{100}{1+\delta}\right)$$

となる。

上記の戦略の組 $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ が部分ゲーム完全均衡点であることは，一回逸脱の原理を用いて確認できる。

プレイヤー 2 の戦略を s_2^* に固定しておく。ここで s_1^* にそった提案をすれば，プレイヤー 1 は x_1^* の利得を得る。一方，異なる s_1 に逸脱したとする。その提案が x_2^* より多くプレイヤー 2 に利得を与える提案であれば，その提案は受諾されるがプレイヤー 1 の利得は x_1^* 以下になる。一方，x_2^* よりプレイヤー 2 に与える利得を少なくする提案であれば，その提案は拒否されて，次のラウンドに y^* が受諾されるので，δy_1^* が利得となる。しかしながらこの δy_1^* も x_1^* 以下であるから，逸脱することでプレイヤー 1 は利得を上げることができない。

プレイヤー 2 も同様で s_2^* からの逸脱は行わない。

プレイヤー 1 が応答者である場合には，提案を拒否すると利得は $\delta x_1^* = y_1$ であるので拒否することで利得を増やすことができない。プレイヤー 2 が応答者であるときも，同様である。

以上より，上記の戦略の組は部分ゲーム完全均衡点であることが確認できた。

プレイヤー 1：$\boldsymbol{\frac{100}{1+\delta}}$ を提案し，$\boldsymbol{\frac{100\delta}{1+\delta}}$ 以上の提案のみ受諾する

（答）

プレイヤー 2：$\boldsymbol{\frac{100\delta}{1+\delta}}$ を提案し，$\boldsymbol{\frac{100}{1+\delta}}$ 以上の提案のみ受諾する

(2) x^*, y^* において $\delta \to 1$ をとると，$\lim_{\delta\to 1} x^* = \lim_{\delta\to 1} y^* = (100/2, 100/2) = (50, 50)$（ナッシュ交渉解）となる。

(プレイヤー 1 の利得，プレイヤー 2 の利得)=(50, 50)（答）

コメント： 部分ゲーム完全均衡点の均衡利得は一意となる。この一意性の証明については，より上級のゲーム理論の教科書である Osborne and Rubinstein (1990) や岡田 (2011) を参照しなさい。(2) の均衡利得の収束先は，対応する交渉問題のナッシュ交渉解である。

第 7 章

グループ形成と利得配分

問題 7.1.

(1) コアは次の連立不等式を満たす配分 (x_A, x_B, x_C) の集合である。

$$\begin{aligned}&x_A + x_B + x_C = 10,\\&x_A + x_B \geqq 7,\quad x_A + x_C \geqq 6,\quad x_B + x_C \geqq 5,\\&x_A \geqq 0,\quad x_B \geqq 0.\quad x_C \geqq 0.\end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x_A + x_B + x_C = 10},\\&\boldsymbol{0 \leqq x_A \leqq 5,\quad 0 \leqq x_B \leqq 4,\quad 0 \leqq x_C \leqq 3}.\end{aligned}\quad \textbf{(答)}$$

A, B, C が全体提携 $\{A, B, C\}$ に参加する順序は全部で 6 通りで，各順序における A, B, C の限界貢献度は次の表のとおり。

順序	A の限界貢献度	B の限界貢献度	C の限界貢献度
ABC	0	7	3
ACB	0	4	6
BAC	7	0	3
BCA	5	0	5
CAB	6	4	0
CBA	5	5	0
平均値	$\frac{23}{6}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{6}$

表より，シャープレイ値は

$$\boldsymbol{\phi_A = \frac{23}{6},\quad \phi_B = \frac{10}{3},\quad \phi_C = \frac{17}{6}}.\quad \textbf{(答)}$$

(2) コアは次の連立不等式を満たす配分 (x_A, x_B, x_C) の集合である。

$$\begin{aligned}&x_A + x_B + x_C = 10,\\&x_A + x_B \geqq 7,\quad x_A + x_C \geqq 7,\quad x_B + x_C \geqq 6,\\&x_A \geqq 0,\quad x_B \geqq 0.\quad x_C \geqq 0.\end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x_A + x_B + x_C = 10},\\&\boldsymbol{0 \leqq x_A \leqq 4,\quad 0 \leqq x_B \leqq 3,\quad 0 \leqq x_C \leqq 3}.\end{aligned}\quad \textbf{(答)}$$

A, B, C が全体提携 $\{A, B, C\}$ に参加する順序は全部で 6 通りで，各順序における各プレイヤーの限界貢献度は次の表のとおり。

順序	A の限界貢献度	B の限界貢献度	C の限界貢献度
ABC	0	7	3
ACB	0	3	7
BAC	7	0	3
BCA	4	0	6
CAB	7	3	0
CBA	4	6	0
平均値	$\frac{11}{3}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{19}{6}$

表より，シャープレイ値は

$$\boldsymbol{\phi_A = \frac{11}{3},\ \ \phi_B = \frac{19}{6},\ \ \phi_C = \frac{19}{6}.}\ \textbf{（答）}$$

問題 7.2.

(1) A, B, C が全体提携 $\{A, B, C\}$ に参加する順序は全部で 6 通りで，各順序における各プレイヤーの限界貢献度は次の表のとおり。

順序	A の限界貢献度	B の限界貢献度	C の限界貢献度
ABC	0	α	$1-\alpha$
ACB	0	$1-\alpha$	α
BAC	α	0	$1-\alpha$
BCA	$1-\alpha$	0	α
CAB	α	$1-\alpha$	0
CBA	$1-\alpha$	α	0
平均値	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

表より，シャープレイ値は

$$\boldsymbol{\phi_A = \phi_B = \phi_C = \frac{1}{3}.}\ \textbf{（答）}$$

（別解） 対称ゲームであるから，すべてのプレイヤーの限界貢献度は対称である。シャープレイ値は配分であるので，全体提携の価値 1 を 3 等分すればよい。

(2) 十分性：$\alpha \leqq \frac{2}{3}$ とする。演習 7.1(3) より，均等配分 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ はコアに含まれる。したがって，コアは非空である。

必要性：(x_A, x_B, x_C) はコア配分であるとする。コア配分は以下の式をみたす。

$$x_A + x_B + x_C = 1 \tag{7.1}$$
$$x_A + x_B \geqq \alpha \tag{7.2}$$
$$x_A + x_C \geqq \alpha \tag{7.3}$$
$$x_B + x_C \geqq \alpha \tag{7.4}$$

(2), (3), (4) を足し合わせると

$$2(x_A + x_B + x_C) \geqq 3\alpha$$

である。これと (1) をあわせると $\alpha \leqq \frac{2}{3}$ を得る。

コメント 対称ゲームのシャープレイ値は均等配分である。対称ゲームにおいて，コアが非空であるための必要十分条件とは，コアがシャープレイ値を含む条件のことである。

問題 7.3.

(1) 特性関数は次のようになる（単位：10 万円）。1 人だけでは取引できないので

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = v(\{D\}) = 0$$

である。また，売り手だけあるいは買い手だけでも取引できないので

$$v(\{A, B\}) = v(\{B, C\}) = v(\{C, D\}) = 0$$

である。A と C，A と D，B と D では取引が発生し

$$\begin{aligned} v(\{A, C\}) &= 20 - 15 = 5 \\ v(\{A, D\}) &= 30 - 15 = 15 \\ v(\{B, D\}) &= 30 - 25 = 5 \end{aligned}$$

である。B と C では，売り手の評価額のほうが買い手のそれよりも高いので取引は起こらず

$$v(\{B, C\}) = 0$$

である。A, B, C の 3 人のときは A と C だけが取引し，B, C, D の 3 人のときは B と D だけが取引するので

$$\begin{aligned} v(\{A, B, C\}) &= 20 - 15 = 5 \\ v(\{B, C, D\}) &= 30 - 25 = 5 \end{aligned}$$

である。A, B, D またはは A, C, D の 3 人のときはいずれも A と D が取引するときに余剰が最大になるので

$$v(\{A, B, D\}) = v(\{A, C, D\}) = 30 - 15 = 15$$

である。A, B, C, D の 4 人のとき，A と D だけが取引するときに余剰が最大になるので

$$v(\{A, B, C, D\}) = 15$$

である。

(2) コアは以下の連立不等式の解の集合である。

$$\begin{aligned} & x_A + x_B + x_C + x_D = 15, \\ & x_A + x_B + x_D \geqq 15,\quad x_A + x_C + x_D \geqq 15, \\ & x_A + x_B + x_C \geqq 5,\quad x_B + x_C + x_D \geqq 5, \\ & x_A + x_D \geqq 15,\quad x_A + x_C \geqq 5,\quad x_B + x_D \geqq 5, \\ & x_A + x_B \geqq 0,\quad x_B + x_C \geqq 0,\quad x_C + x_D \geqq 0, \\ & x_A \geqq 0,\quad x_B \geqq 0,\quad x_C \geqq 0,\quad x_D \geqq 0. \end{aligned}$$

これを解くと

$$\boldsymbol{x_A + x_D = 15,\quad x_A \geqq 0,\quad x_D \geqq 0,\quad x_B = x_C = 0}. \ \textbf{（答）}$$

(3) 市場均衡は 200 万円以上 250 万円以下の価格で A と D が取引する。

問題 7.4.

(1) $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{A, B, C\}$.
(2) 株主の限界貢献度は次の表のとおり。

順序	A の限界貢献度	B の限界貢献度	C の限界貢献度
ABC	0	1	0
ACB	0	0	1
BAC	1	0	0
BCA	0	0	1
CAB	1	0	0
CBA	0	1	0
平均値	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

表より，シャープレイ値は

$$\boldsymbol{\phi_A = \phi_B = \phi_C = \frac{1}{3}}. \text{（答）}$$

(3) 勝利提携は，$\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$, $\{A, B, C, D\}$ の 7 つである。全体提携が形成される順序は $4! = 24$ 通りあり，各順序における株主の限界貢献度は次の表のようになる。

順序	A の限界貢献度	B の限界貢献度	C の限界貢献度	D の限界貢献度
$ABCD$	0	1	0	0
$ABDC$	0	1	0	0
$ACBD$	0	0	1	0
$ACDB$	0	0	1	0
$ADBC$	0	1	0	0
$ADCB$	0	0	1	0
$BACD$	1	0	0	0
$BADC$	1	0	0	0
$BCAD$	1	0	0	0
$BCDA$	0	0	0	1
$BDAC$	1	0	0	0
$BDCA$	0	0	1	0
$CABD$	1	0	0	0
$CADB$	1	0	0	0
$CBAD$	1	0	0	0
$CBDA$	0	0	0	1
$CDAB$	1	0	0	0
$CDBA$	0	1	0	0
$DABC$	0	1	0	0
$DACB$	0	0	1	0
$DBAC$	1	0	0	0
$DBCA$	0	0	1	0
$DCAB$	1	0	0	0
$DCBA$	0	1	0	0
平均値	$\frac{10}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$

表より，シャープレイ値は

$$\boldsymbol{\phi_A = \frac{5}{12},\ \ \phi_B = \frac{1}{4},\ \ \phi_C = \frac{1}{4},\ \ \phi_D = \frac{1}{12}}.\ \ \textbf{（答）}$$

コメント：あるプレイヤーが提携に加わることで敗北提携から勝利提携に変わるとき，**ピボタル**（*pivotal*）であるという。投票ゲームにおけるシャープレイ値とは，全体提携が形成される順序が等確率で起きるとき，プレイヤーがピボタルとなる確率のことである。

問題 7.5.

(1) 特性関数は以下のようになる（単位：億円)。

$$\begin{aligned}
&v(\{A\}) = 8,\ \ v(\{B\}) = 11,\ \ v(\{C\}) = 17,\ \ v(\{D\}) = 19,\\
&v(\{A,D\}) = v(\{B,D\}) = v(\{C,D\}) = 19,\\
&v(\{A,C\}) = v(\{B,C\}) = 17,\ \ v(\{A,B\}) = 11,\\
&v(\{A,B,D\}) = v(\{A,C,D\}) = v(\{B,C,D\}) = 19,\ \ v(\{A,B,C\}) = 17,\\
&v(\{A,B,C,D\}) = 19.
\end{aligned}$$

(2) 全体提携が形成される順序は $4! = 24$ 通りあり，各順序における各社の限界費用は次の表のようになる。

順序	A の限界費用	B の限界費用	C の限界費用	D の限界費用
$ABCD$	8	3	6	2
$ABDC$	8	3	0	8
$ACBD$	8	0	9	2
$ACDB$	8	0	9	2
$ADBC$	8	0	0	11
$ADCB$	8	0	0	11
$BACD$	0	11	6	2
$BADC$	0	11	0	8
$BCAD$	0	11	6	2
$BCDA$	0	11	6	2
$BDAC$	0	11	0	8
$BDCA$	0	11	0	8
$CABD$	0	0	17	2
$CADB$	0	0	17	2
$CBAD$	0	0	17	2
$CBDA$	0	0	17	2
$CDAB$	0	0	17	2
$CDBA$	0	0	17	2
$DABC$	0	0	0	19
$DACB$	0	0	0	19
$DBAC$	0	0	0	19
$DBCA$	0	0	0	19
$DCAB$	0	0	0	19
$DCBA$	0	0	0	19
平均値	2	3	6	8

表より，シャープレイ値に対応する各社の費用負担額は

A 社：2 億円，B 社：3 億円，C 社：6 億円，D 社：8 億円　（答）

である。

問題 7.6. 学生が教員に受入を申し込むとして，GS アルゴリズムを適用する。まず，A と C が X に希望を出し，B が Y を希望する。X は A を仮採用し，C を拒否する。Y は B を仮採用する。次に C は Z に希望を出すが，Z は C を受入れるより誰も受入れないほうがよいので，C の受入を拒否する。最後に C は Y に希望を出すが，Y は C よりも B を採用したいので，C の受入を拒否する。C はどの研究室にも所属しないことになり，終了する。最終的に実現するマッチングは

(A, X)，(B, Y)，(C, ∅)，(∅, Z)　（答）

となる。

このマッチングにおいて，A と B は第 1 希望の研究室に所属している。C はどこかの研究室に所属することを望むが，X と Y は C より好ましい学生を受入れており，Z は C を受入れるよりも誰も受入れないほうを望んでいる。したがって，このマッチングは安定である。

問題 7.7.

(1) α において A と B のペアを考える。β において，A の相手は C，B の相手は D であるが，A は C よりも B が好ましく，B は D よりも A が好ましい。よって，α は β を支配する。
(2) β において A と C のペアを考える。γ において，A の相手は D，C の相手は B であるが，A は D よりも C が好ましく，C は B よりも A が好ましい。よって，β は γ を支配する。
(3) γ における B と C のペアを考える。γ において，B の相手は A，C の相手は D であるが，B は A よりも C が好ましく，C は D よりも B が好ましい。よって，γ は α を支配する。(1) と (2) の結果を併せると，支配されないマッチングは存在しないことが示された。

問題 7.8.

(1) 1 回目の指差しの結果は次のようになる。

$$A \to B, B \to C, C \to A, D \to C, E \to A.$$

$A \to B \to C \to A$ のサイクルができるので，A に b を，B に c を，C に a を割り当てる。2 回目の結果は

$$D \to D, E \to D$$

となる。$D \to D$ のサイクルができるので，D に d を割り当てる。3 回目は

$$E \to E$$

であるから，E に e を割り当てて終了する。最終的に実現する割当は

$$\boldsymbol{(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (b, c, a, d, e)}. \textbf{（答）}$$

(2) $p_a = p_b = p_c > p_d > p_e$ であるから，A, B, C の 3 人はすべてのカードが購入可能である。よって，A は b を，B は c を，C は a を需要する。D は d と e が購入可能であるから，より利得の高い d を需要する。E は e のみ購入可能であるので e を需要する。つまり，この価格の下でカードの需要と供給が一致し，取引の結果は

$$(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (b, c, a, d, e).$$

となる。これは TTC 法による割当と一致する。

コメント　TTC 法とは，コアに属する配分のうち競争均衡配分を見つけ出すアルゴリズムである。

第 8 章

進化ゲーム

問題 8.1.

(a) 本問の利得行列は，演習 8.4 の $V = C = 2$ のケースである。演習 8.4(1) より，戦略 H が進化的に安定である。

H （答）

(b) 本問の利得行列は，演習 8.4 の $V = 2, C = 4$ のケースである。演習 8.4(2) より，確率 $\frac{1}{3}$ で H，確率 $\frac{2}{3}$ で D をとる混合戦略が進化的に安定である。

確率 $\frac{1}{3}$ で H，確率 $\frac{2}{3}$ で D をとる混合戦略 （答）

(c) 確率 p で H を選ぶ混合戦略を s とし，確率 q で H を選ぶ混合戦略を t とする。ただし，$p \neq q$ とする。さらに，$r = (1-\varepsilon)p + \varepsilon q$ とおいて，確率 r で H を選ぶ混合戦略を $(1-\varepsilon)s + \varepsilon t$ とする。戦略 s が進化的に安定な戦略であるとは，どんな戦略 $t \neq s$ に対しても，十分小さい ε について，

$$(1-\varepsilon)u(s,s) + \varepsilon u(s,t) > (1-\varepsilon)u(t,s) + \varepsilon u(t,t)$$

すなわち

$$u(s,(1-\varepsilon)s + \varepsilon t) > u(t,(1-\varepsilon)s + \varepsilon t)$$

が成り立つことである。ここで，

$$\begin{aligned} u(s,(1-\varepsilon)s + \varepsilon t) &= 2pr + (1-p)(1-r) \\ u(t,(1-\varepsilon)s + \varepsilon t) &= 2qr + (1-q)(1-r) \end{aligned}$$

である。2 式の差をとると

$$(p-q)(3r-1)$$

となる。戦略 s が進化的に安定であるとは，$(p-q)(3r-1) > 0$ が成り立つことである。

(i) $\boldsymbol{p = 1}$ とする。このとき，どんな q であっても $p > q$ であるから，$p - q > 0$ である。また，どんな q であっても，十分小さい $\varepsilon > 0$ であれば，$r = 1 - \varepsilon + \varepsilon q > \frac{1}{3}$ とできるので，$3r - 1 > 0$ である。したがって，$(p-q)(3r-1) > 0$ である。つまり，$p = 1$ のとき，戦略 s は進化的に安定である。

(ii) $\boldsymbol{p = 0}$ とする。このとき，どんな q であっても $p < q$ であるから，$p - q < 0$ である。また，どんな q であっても，十分小さい $\varepsilon > 0$ であれば，$r = \varepsilon q < \frac{1}{3}$ とできるので，$3r - 1 < 0$ である。したがって，$(p-q)(3r-1) > 0$ である。つまり，$p = 0$ のとき，戦略 s は進化的に安定である。

(iii) $\boldsymbol{0 < p \leqq 1/3}$ とする。このとき，$q = 0$ とすると，$p - q > 0$ であり，どんな $\varepsilon > 0$ であっても $r = (1-\varepsilon)p < 1/3$ であるから，$3r - 1 < 0$ である。すなわち，$(p-q)(3r-1) < 0$ であるから，$0 < p \leqq 1/3$ のとき，戦略 s は進化的に安定ではない。

(iv) $\boldsymbol{1/3 < p < 1}$ とする。このとき，$q = 1$ とすると，$p - q < 0$ であり，どんな $\varepsilon > 0$ であっても $r = (1-\varepsilon)p + \varepsilon > 1/3$ であるから，$3r - 1 > 0$ である。すなわち，$(p-q)(3r-1) < 0$ であるから，$1/3 < p < 1$ のとき，戦略 s は進化的に安定ではない。

以上より，戦略 s が進化的に安定となるのは，$p = 0, 1$ のときのみである。

H, D （答）

コメント：(c) において，以下の問題 8.2(2) の結果より，純戦略 H, D はいずれも進化的に安定であることがわかる。

問題 8.2.

(1) s^* を ESS とし，t を任意の戦略とする。ESS の定義より，十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(1-\varepsilon)u(s^*, s^*) + \varepsilon u(s^*, t) > (1-\varepsilon)u(t, s^*) + \varepsilon u(t, t)$$

が成り立つ。$\varepsilon \to 0$ とすると

$$u(s^*, s^*) \geqq u(t, s^*)$$

である。すなわち，s^* に対する最適応答は s^* である。これは戦略の組 (s^*, s^*) がナッシュ均衡点であることを意味する。

(2) (s^*, s^*) が強い均衡点あるなら，s^* とは異なる任意の戦略 t に対して

$$u(s^*, s^*) > u(t, s^*)$$

すなわち，（1 より小さい）任意の ε について

$$(1-\varepsilon)u(s^*, s^*) > (1-\varepsilon)u(t, s^*)$$

が成り立つ。このとき，十分小さい ε であれば

$$(1-\varepsilon)u(s^*, s^*) + \varepsilon u(s^*, t) > (1-\varepsilon)u(t, s^*) + \varepsilon u(t, t)$$

が成り立つ。これは，s^* は ESS であることを意味する。

問題 8.3. 集団 j における戦略 H の比率が x_j であるとき，集団 i から選ばれたプレイヤーの期待利得を考える（$i, j = 1, 2, i \neq j$）。集団 i のプレイヤーの戦略が H であるときの期待利得は

$$x_j \frac{V_i - C_i}{2} + (1 - x_j)V_i = -\frac{V_i + C_i}{2} x_j + \frac{V_i}{2}$$

であり，D であるときの期待利得は

$$(1-x_j)\frac{V_i}{2}$$

である。集団 i のプレイヤーにとって，戦略 H のほうが D より期待利得が高くなるのは

$$\frac{V_i+C_i}{2}x_j+\frac{V_i}{2}>(1-x_j)\frac{V_i}{2}$$

となるとき，すなわち

$$x_j<\frac{V_i}{C_i}$$

のときである。同様に，D のほうが H より期待利得が高くなるのは

$$x_j>\frac{V_i}{C_i}$$

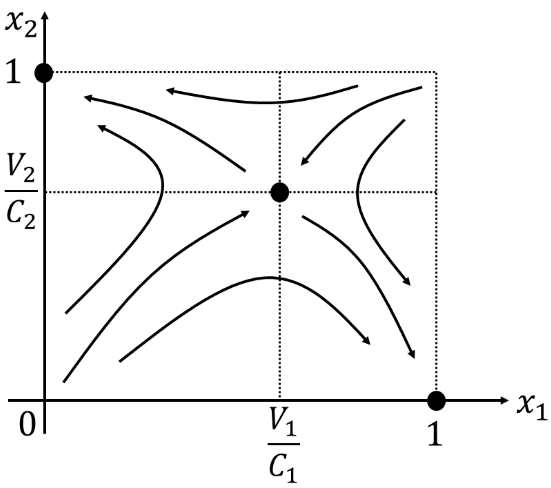
であり，H と D の期待利得が等しくなるのは

$$x_j=\frac{V_i}{C_i}$$

である。したがって，x_1, x_2 の変化は次のように記述される。

$\frac{V_2}{C_2}<x_2<1$	x_1：減少, x_2：増加	x_1：減少, x_2：減少
$0<x_2<\frac{V_2}{C_2}$	x_1：増加, x_2：増加	x_1：増加, x_2：減少
	$0<x_1<\frac{V_1}{C_1}$	$\frac{V_1}{C_1}<x_1<1$

位相図は次のようになる。



問題 8.4.

(1) 交渉が成立するのは，価格のペア (p_S, p_B) が $(800, 1000)$, $(800, 800)$, $(1000, 1000)$ の 3 つの場合で，取引価格はそれぞれ 900, 800, 1000 である。したがって，利得行列は次のようになる。

		買い手	
		1000 円（弱気）	800 円（強気）
売り手	800 円（弱気）	400, 1100	300, 1200
	1000 円（強気）	500, 1000	−500, 0

このゲームの純戦略ナッシュ均衡点は

(1000 円（強気），1000 円（弱気）)，(800 円（弱気），800 円（強気）)　（答）

である。また，売り手が弱気戦略を選ぶ確率を x，買い手が弱気戦略を選ぶ確率を y とすると，混合戦略ナッシュ均衡点は

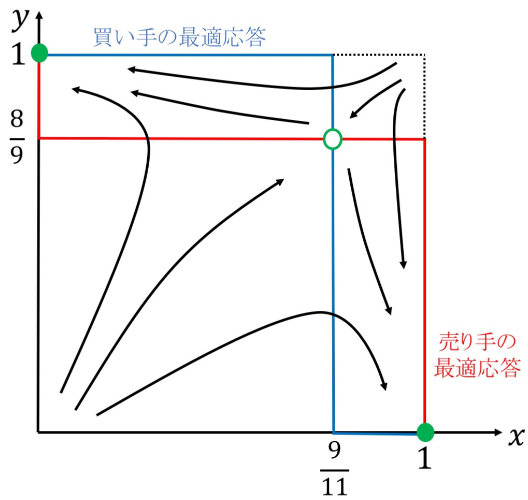
$$\boldsymbol{x = \frac{10}{11},\ \ y = \frac{8}{9}} \quad \textbf{（答）}$$

である。

(2)　買い手集団内の弱気タイプの比率が $\frac{8}{9}$ 以上であるとき，売り手の最適応答は強気であるから，売り手の強気タイプは増加する。買い手集団内の弱気タイプの比率が $\frac{8}{9}$ 以下であるとき，売り手の最適応答は弱気であるから，売り手の弱気タイプは増加する。

売り手集団内の弱気タイプの比率が $\frac{10}{11}$ 以上であるとき，買い手の最適応答は強気であるから，買い手の強気タイプは増加する。売り手集団内の弱気タイプの比率が $\frac{10}{11}$ 以下であるとき，買い手の最適応答は弱気であるから，買い手の弱気タイプは増加する。

以上より，売り手・買い手の最適応答および位相図は以下のようになる。



(3) 位相図において，売り手，買い手それぞれの弱気タイプの比率と強気タイプの比率の増減を同時に考慮すると，2 つの純戦略ナッシュ均衡点は進化的に安定であるが，混合戦略ナッシュ均衡点は，均衡点に収束する経路もあるが，遠ざかる経路もあり，安定的であるとは言えない。