Web 付録　第３章　補論

補論 3.2　2 位価格オークションの耐戦略性

本文では直観的に，2 位価格オークションにおいては自分の評価値と等しい値の価格を入札することが最適であることを示しましたが，今度はもう少し厳密にこのことを証明してみましょう。

いまあなたにとって，入札価格bを評価値vと等しくするか，それよりも高い価格$w(> v)$にするか，どちらが得であるか考えてみましょう。このとき，あなた以外のプレーヤーが入札する価格のうち，最も大きな値をsとします。もしあなたの入札した価格が 1 位であれば，このsがあなたの支払うべき 2 位の価格になります。

もちろん，他のプレーヤーがどのような価格を入札するのかは，オークションが終わってみるまではわかりません。したがって，sの値が取りうる範囲について，場合分けして考えなければなりません。

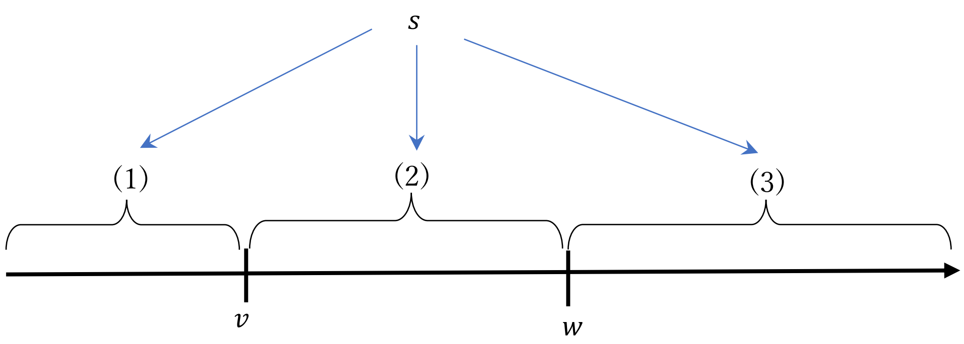

図 1　2 位価格オークションにおいてsの値が取りうる範囲

簡単化のため，あなたと他のプレーヤーの入札価格が同じ額になることはないと仮定すると，起こりうる場合としては次の 3 通りがありえます。(1) $s < v$, (2) $v < s < w$, (3) $w < s$の 3 つです（**図 1**）。そこで，これら 3 つの場合についてそれぞれ，オークションの結果，あなたが得ることになる利益を表にしたのが**表 1** になります。

sの値 ＼ 入札価格b	(1) $s < v$	(2) $v < s < w$	(3) $w < s$
v	$v - s$	0	0
$w(> v)$	$v - s$	$v - s < 0$	0

表 1　2 位価格オークションの利得表

まず，他のプレーヤーが入札する価格のうち最も大きな値であるsが(1) $s < v$の範囲であった場合，あなたにとっては評価値vを入札しようと，それより高い値wを入札しようと落札できて，2 位の価格であるsを支払うことになります。よって，あなたの利得は手に入れた財の評価値vから支払額sを差し引いた$v - s$となります。

次に，sの値が（2）$v < s < w$ の範囲であった場合，もしあなたが評価値vに等しい値の価格を入札していれば落札できませんが（$v < s$なので，1 位の価格は他のプレーヤーの入札価格の中にある），それより高い値wを入札していれば落札できます。このとき，前者の場合では落札できない代わりに何も支払わなくてもよいので利得は 0 ですが，後者の場合では，落札できるのであなたの利得は手に入れた財の評価値vから支払額sを差し引いた$v - s$となります。しかし，$v < s$であるため，$v - s$の値はマイナスとなります。よって，評価値vに等しい値の価格を入札した方が利得は高くなります。

最後に，sの値が(3) $w < s$の場合，あなたにとっては評価値vを入札しようと，それより高い値wを入札しようと落札できないので，いずれの場合も利得は 0 になります。

これら 3 つの場合全体を通じて，評価値vに等しい値の価格を入札した場合の利得の方が,それより高い値wを入札した場合の利得と同じかそれ以上であることがわかります。

したがって，他の入札者が付ける価格のうち最も大きな値であるsが 3 つの場合のどれになるか完全に無知であったとしても，どの場合においても評価値vに等しい値の価格をビッドしておけば，それより高い値wを入札した場合の利得より低い利得になることはありません。よって，評価値vに等しい値の価格を入札することが**支配戦略**になります。

同様の議論により，評価値vに等しい値の価格を入札するという戦略が，それより低い値u$(< v)$を述べる戦略よりも優れていることが示せます。こうして，2 位価格オークションは**耐戦略性**を満たすことがわかりました。

別証明：

真の評価値がvであるプレーヤーが 2 位価格オークションで入札する価格をwとします。また，他のプレーヤーが入札する価格のうち最も大きな値をsとします。また，sの値が取りうる範囲を$[0, M]$とします。ただし，Mはある有限の値とします（$M < \infty$）。sの値はその確率密度関数がf，分布関数がFであるような分布に従う確率変数とし，任意のsの値に対して$f(s) > 0$とします。つまり，sは区間$[0, M]$上のどの値もゼロではない確率で取りうると仮定します。このとき，あなたの 2 位価格オークションにおける期待利得は次のようになります。

$$E\pi = \int_0^w (v - s) f(s) ds + \int_w^M 0 \cdot f(s) ds$$

この式の右辺第 1 項は，他の入札者が入札する価格のうち最も大きな値sがあなたの入札する価格wより低い場合で，そのときあなたは落札者となり，評価値vの財を 2 位の価格sで手に入れます。その場合の利得の期待値は$(v - s)$にsの発生確率$f(s)$を掛けて，sがw以下であ

る場合について足し合わせた（積分した）ものとなります。右辺第 2 項はsがwより高い場合で，そのときあなたは落札できませんので，その場合の期待利得はゼロとなります。

この期待利得を最大にするような価格wは，

$$\frac{\partial E\pi}{\partial w} = (v - w)f(w) = 0$$

を解けば得られます。任意のsの値に対して$f(s) > 0$だったので，$w = v$が期待利得を最大にするような価格になります。実際，期待利得を二階微分してみると，

$$\frac{\vartheta^2 E\pi}{\partial w^2} = -f(w) + (v - w) = -f(w) < 0$$

となっているので，$w = v$が期待利得の最大値を与えることがわかります。こうして，2 位価格オークションでは，自分の真の評価値vを入札することが最適であることが証明できました。

補論 3.3　2 **位価格オークションとグローブス・メカニズム**

2 位価格オークションはグローブス・メカニズムの一種だということを具体的に見ていきましょう。

いま一般にプレーヤーはn人いて，各プレーヤーiの効用関数u_iは準線形，つまり，$u_i(x_i, G) = x_i + v_i \cdot G$であるとします。ここで，$x_i$はプレーヤー$i$の初期保有，$v_i$はオークションで販売されている財の評価値，そして$G = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$はオークションにおける財の配分（落札結果）を表すものとします。ただし，g_iは 0 か 1 の値を取るものとし，かつその合計が 1 になる，つまり，

$$\sum_i g_i = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 1$$

とします。上の式は，プレーヤーiが落札して財を手に入れた場合に$g_i = 1$，それ以外では$g_i = 0$であるとすると，たかだか 1 人のプレーヤーしか財を手に入れることができないということを意味します。また，落札できなかった場合の利得は 0，つまり，$v_i(0) = 0$とします。

各プレーヤーiは，財に対する評価値w_iを表明します。そして，各プレーヤーiの表明した評価値のプロファイル$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$を基に，オークションにおける財の配分は，以下の決定関数$d(w)$によって決定されます。

$$d(w) = max_G \sum_i w_i\, g_i = max_G(w_1 g_1 + \cdots + w_n g_n)$$

g_iはたかだか 1 人のプレーヤーについて 1 となることから，上の式は，最も高い評価値w_iを表明したプレーヤーに財を落札させるような財の配分Gが選ばれることを意味します。

最後に，各プレーヤーiの支払額は，

$$t_i = \begin{cases} max_{j \neq i}(w_j) & w_i > max_{j \neq i}(w_j) \\ 0 & w_i < max_{j \neq i}(w_j) \end{cases}$$

によって決められます。ここで，$max_{j \neq i}(w_j)$はプレーヤーi以外が表明した評価値w_jの中で最も高い評価値を意味します。したがって，プレーヤーiの表明した評価値w_iがそれよりも大きければプレーヤーiが落札することになり，そのときにのみ，プレーヤーiは表明された中で 2 番目に高い評価値，つまり，$max_{j \neq i}(w_j)$を支払います。プレーヤーiが落札しない場合は何も支払う必要はなく，$t_i = 0$ということになります。なお，この支払額t_iは，グローブス・メカニズムにおけるのと同様に，プレーヤーiの表明した選好（評価値w_i）には依存しない形になっていることに注意してください。

最終的に各プレーヤーiの利得は，グローブス・メカニズムにおけるプレーヤーの利得と同じ形で

$$u_i(x_i, G) = x_i + v_i \cdot G - t_i$$

となります。このように，2 位価格オークションは第 2 章で説明したグローブス・メカニズムの特殊ケースであることが確認できました。

補論 3.4　収益同値定理の証明

なぜ収益同値定理が成り立つのかについては，この定理自体が直観に反する非常に驚くべきものであるだけに，直観的に説明することは難しいです。そこで，収益同値定理を証明するには，微積分による計算が不可欠です。いくつかの証明方法が知られていますが，その中でも一番，数学的な予備知識が少なくて済むもの（微係数の定義だけを理解していればいい）をここで紹介します[1]。

まず，収益同値定理の一連の仮定が満たされたオークションにおいて，評価値がvであるプレーヤーは，確率$P(v)$で落札し，価値vの財を手に入れ，$E(v)$という額を支払うものだとすると，その期待利得$S(v)$は，

$$S(v) = v \times P(v) - E(v)$$

となります。なお，落札確率$P(v)$はプレーヤーの評価vごとに異なることに注意してください。

ここで，評価値がvであるプレーヤーが，あたかも評価値がv'であるかのような入札をしたとすると，落札確率は$P(v')$になり，そのときの期待利得は$S(v')$となります。

$$S(v') = v \times P(v') - E(v')$$

[1] 以下の証明は，Klemperer (2004)の Appendix 1.A.によるものです。Klemperer (2004)にも説明されていますが，他に簡潔な証明としては，包絡線定理を用いた証明(Milgrom, 1989)があります。また，スティグリッツ(2008)の付録 A にも比較的やさしい解説があります。

しかし，評価値がvであるプレーヤーが最適戦略に従っているかぎり，このような入札をしても落札確率を上げることはできないはずです。したがって，最適戦略に従って入札した時の期待利得の方が大きくなるはずです。ここで，以下の不等式を考えます。

$$S(v) - S(v') \geq (v - v')P(v')$$

この式は，評価値vのプレーヤーが最適戦略に従った場合の期待利得$S(v)$と，評価値がv'であるかのように入札したときの期待利得$S(v')$との差額が，少なくとも$(v - v')P(v')$であることを示しています。これは，評価値vのプレーヤーが$P(v')$の確率で落札できた際に手に入れるのは価値v'ではなく価値vの財なので，その差額分を評価値がv'であるかのように入札することで得たとしても，最適戦略に従う方が期待利得は高いはず，という事実を反映しています。

ここで，vとv'の差額dvが非常に小さく，$v' = v + dv$だとします。すると，上の式は

$$S(v) \geq S(v + dv) + (-dv)P(v + dv)$$

となります。同じく，評価値が$v + dv$のプレーヤーもまた，あたかも評価値がvである人のような入札をしても得をすることはできないので，同様に，

$$S(v + dv) \geq S(v) + (dv)P(v)$$

となり，この 2 つの式を 1 つに組み合わせると，

$$P(v) \leq \frac{S(v + dv)}{dv} \leq P(v + dv)$$

となります。ここでdvは非常に小さな数だったので，$dv \to 0$の極限を取ると，微係数の定義から，

$$\frac{dS}{dv} = P(v)$$

が得られます。この式は，プレーヤーの期待利得$S(v)$をグラフに描いたときのvにおける接線の傾きが，落札確率$P(v)$であることを意味します（**図 2**）。

収益同値定理の仮定では評価値が 0 のプレーヤーの支払額は 0 だったことを思い出すと，プレーヤーの評価値の分布の上限を$M(M < \infty)$とすれば，

$$S(v) = \int_0^M P(v)dv$$

となります。これからプレーヤーの期待利得$S(v)$は落札確率$P(v)$だけで決まっていることがわかります。したがって，プレーヤーの支払額$E(v)$もまた落札確率$P(v)$だけで決まっていなければなりません。

ところが，落札確率$P(v)$は，プレーヤーの評価値の確率分布のみに依存していて，オークション方式とは独立に決まるので，これで収益同値定理が証明されたことになります。

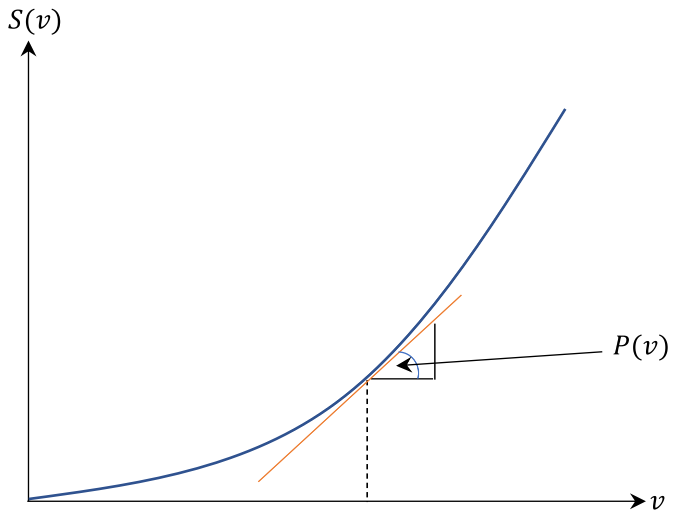

図 2　期待利得

具体例

さて，いま一般にn人のプレーヤーがいて，各プレーヤーの評価値vが区間$[0,1]$の実数から一様分布に従って独立に選ばれており，各プレーヤーが対称的な戦略，つまり，同一のビッド関数を使用しているとします。

このとき，本文の補論 3.1 によれば，1 位価格オークションにおける最適ビッドb^1は以下のとおりでした。

$$b^1(v) = \frac{n-1}{n}v$$

売り手は落札者からこれを支払い額として受け取ります。したがって，1 位価格オークションにおける売り手の収益の期待値は次のようになります。

$$E^1 = n\int_0^1 b^1(v)F^{n-1}(v)dv$$

これは，評価値vのプレーヤーの支払額にこのプレーヤーが落札する確率$F^{n-1}(v)$を掛けた値を，評価値vの取りうる範囲$[0,1]$にわたって合計（積分）した値に，プレーヤーの人数nを掛けたものです。nを掛けるのは，どのプレーヤーにも落札するチャンスがあるためです。

ここで，区間$[0,1]$の一様分布の確率密度関数$f(v)$および分布関数$F(v)$は以下のとおりでしたから，

$$f(v) = 1, F(v) = v$$

これらを代入すると，

$$E^1 = n\int_0^1 \frac{n-1}{n}v \times v^{n-1}dv = (n-1)\left[\frac{1}{n+1}v^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n-1}{n+1}$$

となります。

次に，2 位価格オークションの場合を考えます。2 位価格オークションにおける最適ビッ

ドb^2は以下のとおりでした。

$$b^2(v) = v$$

ただし，売り手が受け取る支払い額は 2 番目に高い価格$w(< v)$であることに注意してください。したがって，評価値vのプレーヤーが落札し，2 番目に高い価格wを支払うものとして, 2 位価格オークションにおける売り手の収益の期待値を考えると, 次のようになります。

$$E^2 = n(n-1)\int_0^1 w(1-F(w))F^{n-2}(w)dw$$

これは，評価値wのプレーヤーが 2 番であるのは，評価値wのプレーヤー（落札者）が 1 人いて，他の$n-2$人のプレーヤーの評価値がw以下である場合です。前者である確率は$1-F(w)$で，後者である確率は$F^{n-2}(w)$なので，2 番目に高い価格wに，この確率$(1-F(w))F^{n-2}(w)$を掛けた値を，評価値vの取りうる範囲$[0, 1]$にわたって合計（積分）した値に，$n(n-1)$を掛けたものが売り手の収益の期待値になります。$n(n-1)$を掛けるのは，n人のどのプレーヤーにも落札するチャンスがあり，また，落札者 1 人に対して残り$n-1$人の誰もが 2 番になるチャンスがあるためです。

さて，区間$[0, 1]$の一様分布の確率密度関数$f(v)$および累積分布関数$F(v)$を代入すると，

$$E^2 = n(n-1)\int_0^1 w(1-w)w^{n-2}dw = n(n-1)\left[\frac{1}{n}w^n - \frac{1}{n+1}w^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n-1}{n+1}$$

となり，1 位価格オークションの場合の売り手の期待収益と等しくなります。こうして，収益同値定理が確認できました。