Web 付録　第２章　補論

補論 2.1　中位投票者定理の証明

プレーヤーの数nを奇数とします。そこで，例えば，中央値G_mより低い水準の公共財供給量G' ($G' < G_m$)を考えてみます。このG'とG_mと比較する多数決投票を行うと，G_mかそれより高い水準の公共財供給量G'' ($G'' \geq G_m$)を表明したプレーヤーにとっては，G_mの方がG'より好ましいはずです。というのは，各プレーヤーは単峰的な選好を持っているので，G''を表明したプレーヤーにとっては，公共財供給量がそれより小さくなるにしたがって，効用は単調に下がっていくはずだからです（図 1）。

それで，G_mは，ちょうどちょうど真ん中にあたる順位mの投票者が選んだ公共財の水準なので，この投票者を含めて$G'' \geq G_m$であるような投票者は$m+1$人います。この投票者総数の半分より 1 人多い投票者たちがG'とG_mとの比較ではG_mに投票しますので，G_mが多数決の勝者になります。ここまでの議論は，$G' < G_m$であるようなG'すべてに当てはまります。また，同様の議論により，$G'' > G_m$であるようなG''すべてに対してG_mが多数決の勝者になることが示せます。よって，G_mがコンドルセ勝者になります。

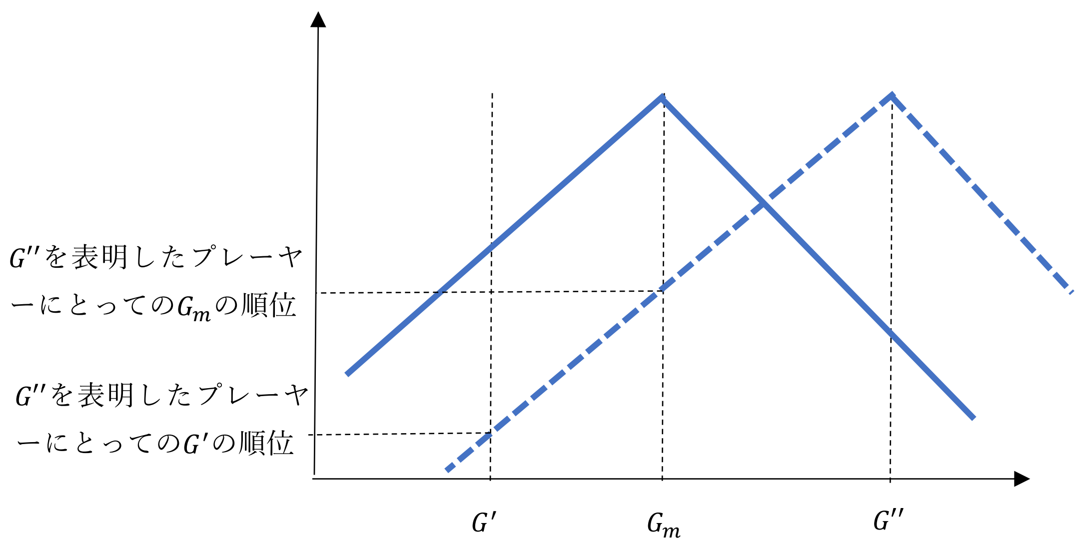

図 1　単峰的な選好

補論 2.2　ピボタル・メカニズムが耐戦略性を満たすことの証明

最初に，公共財に対する評価値がv_iであるプレーヤーiが，$w_i > v_i > 0$であるようなw_iを表明する場合を考えてみます。すなわち，プレーヤーiが公共財に対する評価値を過大表明する場合を考えます。

プレーヤーiは，他のプレーヤーがどのような評価値を表明するのかあらかじめわかりま

せん。そこで，プレーヤーi以外が表明する公共財に対する評価値の合計$w_{-i} = \sum_{j \neq i} w_j$が，次の 4 つの範囲，（1）$-w_{-i} < -w_i$，（2）$-w_i < -w_{-i} < -v_i$，（3）$-v_i < -w_{-i} < 0$，（4）$0 < -w_{-i}$のいずれかに入る場合をそれぞれ検討することにします。

これらの場合分けを数直線上に表すと，以下の**図 2** になります。

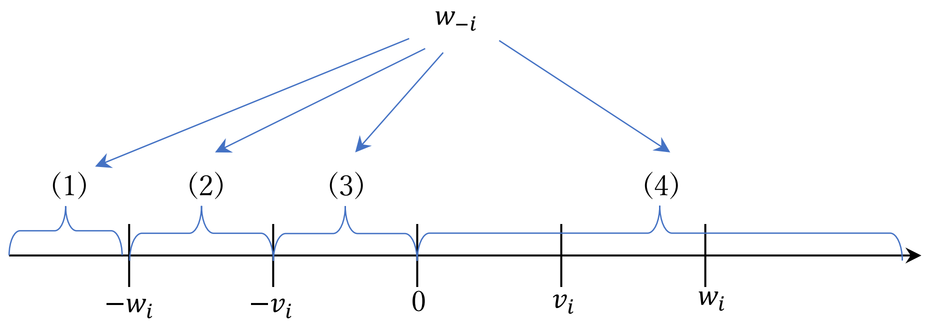

図 2　プレーヤーi以外が表明する評価値の合計w_{-i}の場合分け

プレーヤーi以外が表明する公共財に対する評価値の合計w_{-i}について，**図 2** に示した 4 つの場合のそれぞれにおいて，プレーヤーiが受け取る利得を，真の評価値v_iを表明した場合と，いま検討している過大表明$w_i > v_i$の場合について比較すると次の**表 1** のようになります。

なお，ここでは説明の単純化のために，私的財の初期保有は$x_1 = 0$としています。この表から，プレーヤーiにとって，正直に真の評価値v_iを表明するという戦略が，過大表明$w_i > v_i$することを支配していることを示すことができます。

表 1　ピボタル・メカニズムにおける利得

	(1) $w_{-i} < -w_i$	(2) $-w_i < w_{-i} < -v_i$	(3) $-v_i < w_{-i} < 0$	(4) $0 < w_{-i}$
v_i	0	0	$v_i - t_i$	v_i
$w_i > v_i$	0	$v_i - t_i < 0$	$v_i - t_i$	v_i

まず（1）の場合ですが，プレーヤーi以外が表明する評価値の合計w_{-i}が，プレーヤーiの表明する評価値w_iの絶対値よりも大きいマイナスの値を取っているので，$w_i + w_{-i} < 0$，すなわち，$G = 0$となり，公共財は供給されません。この結果は，プレーヤーiがw_iを表明した場合でも，正直に真の評価値v_iを表明した場合でも同じです。また，プレーヤーiがw_iを表明した場合も，正直に真の評価値v_iを表明した場合も，プレーヤーiが参加するかしないかに関係なく公共財が供給されないという結果は変わらないので，つまり，$\sum_i w_i < 0$かつ$\sum_{j \neq i} w_j < 0$なので，クラーク税は 0 となります。よって，この場合のプレーヤーiの利得はいずれも 0 となります。

次に，（2）の場合ですが，プレーヤーi以外が表明する評価値の合計w_{-i}は，プレーヤーiの表明する評価値w_iの絶対値よりも小さいマイナスの値を取っているので，プレーヤーiがw_iを表明した場合には，$w_i + w_{-i} > 0$，すなわち，$G = 1$となり，公共財は供給されます。この場合，プレーヤーiが参加しなければ$w_{-i} < 0$なので公共財が供給されないにもかかわらず，プレーヤーiが参加すると公共財が供給されるので，プレーヤーiはクラーク税$t_i = |w_{-i}|$を支払わなければなりません。よって，この場合のプレーヤーiの利得は$v_i - t_i$となります。ただし，$|w_{-i}|$はv_iよりも大きな値であるため，$v_i - t_i < 0$となります。一方，ここでプレーヤーiが正直に真の評価値v_iを表明した場合には$v_i + w_{-i} < 0$，すなわち，$G = 0$となり，公共財は供給されません。この場合，プレーヤーiが参加するかしないかに関係なく公共財が供給されないという結果は変わらないので，クラーク税は 0 となります。よって，この場合のプレーヤーiの利得は 0 となります。

今度は（3）の場合ですが，プレーヤーi以外が表明する評価値の合計w_{-i}が，プレーヤーiの真の評価値v_iの絶対値の両方よりも小さいマイナスの値を取っているので，$v_i + w_{-i} > 0$，すなわち，$G = 1$となり，公共財は供給されます。$w_i > v_i$なので，この結果は，プレーヤーiがw_iを表明した場合も同じです。また，プレーヤーiがw_iを表明した場合も，正直に真の評価値v_iを表明した場合も，プレーヤーiが参加すれば公共財が供給され，参加しなければ公共財は供給されないので，つまり，$\sum_i w_i > 0$かつ$\sum_{j \neq i} w_j < 0$なので，プレーヤーiはクラーク税$t_i = |w_{-i}|$を支払わなければなりません。よって，この場合のプレーヤーiの利得はいずれも$v_i - t_i$となります。

最後に（4）の場合ですが，プレーヤーi以外が表明する評価値の合計w_{-i}はプラスの値なので，プレーヤーiがw_iを表明しても正直に真の評価値v_iを表明しても$w_i + w_{-i} > 0$，すなわち，$G = 1$となり，公共財は供給されます。また，この場合，$w_{-i} > 0$なので，プレーヤーiが参加してもしなくても公共財は供給されるので，プレーヤーiはクラーク税を支払う必要はありません。よって，この場合のプレーヤーiの利得はv_iとなります。

こうして見ると，（1）（3）（4）の場合には，プレーヤーiがw_iと過大表明しても評価値v_iを正直に表明しても利得は同じですが，（2）の場合には評価値v_iを正直に表明した方が利得が高いことがわかります。したがって，プレーヤーi以外がどのような評価値を表明しようとも，評価値v_iを正直に表明するという戦略が，過大表明$w_i > v_i$するという戦略を支配していることになります。

同様の議論により，評価値v_iを正直に表明するという戦略が，過小表明する（$w_i < v_i$）という戦略を支配していることを示すことができます。また，上記の議論はプレーヤーiの真の評価値がプラスの値，すなわち，$v_i > 0$の場合を想定していましたが，$v_i < 0$の場合も同様にして，評価値v_iを正直に表明するという戦略が他の戦略を支配していることを示すことができます。

よって，ピボタル・メカニズムにおいて，評価値v_iを正直に表明するという戦略が支配戦略であることがわかります。

補論 2.3　**グローブス・メカニズムとピボタル・メカニズムとの関係**

グローブス・メカニズムを 2.5 節で説明したピボタル・メカニズムと比較するために，分割不可能な 1 単位の公共財を生産するか否かの決定を行う場合のグローブス・メカニズムについて考えてみましょう。すなわち，Gは 1 か 0 でありかつ$v_i(G) = v_i \cdot G$であり，また公共財の生産費用を$c(G) = 0$と基準化した場合には，グローブス・メカニズムは次のようになります。

$$G = d(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_i w_i \geq 0 \\ 0 & \text{if } \sum_i w_i < 0 \end{cases}$$

$$t_i = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_j + h(w_{-i}) & \text{if } \sum_i w_i \geq 0 \\ h(w_{-i}) & \text{if } \sum_i w_i < 0 \end{cases}$$

ここで，課税関数t_iにおける任意関数を

$$h(w_{-i}) = min(-\sum_{j \neq i} w_j, 0)$$

とすれば，グローブス・メカニズムはピボタル・メカニズムと同一になります（ここで，$min(A, B)$はＡかＢ，いずれか小さい方の値になるという関数です）。実際，各プレーヤーiについて，以下の(1)～(3)の場合について確認するとそのことがわかります。

(1)　もし$|w_i| \geq \left|\sum_{j \neq i} w_j\right|$かつ$w_i > 0 > \sum_{j \neq i} w_j$ならば，$\sum_i w_i > 0$なので，$t_i = \sum_{j \neq i} w_j + 0 = \sum_{j \neq i} w_j < 0$となるのでプレーヤー$i$は$\sum_{j \neq i} w_j$の絶対値に等しい額を支払うことになります。この場合，$\sum_{j \neq i} w_j < 0$なので$G = 1$となり公共財が供給されますが，プレーヤーiの表明する需要w_iの絶対値は，プレーヤーi以外の表明する需要の合計$\sum_{j \neq i} w_j$の絶対値より大きく，プレーヤーi以外の希望に反して公共財を供給したいというプレーヤーiの希望が実現するので，プレーヤーiはプレーヤーi以外の表明する需要の合計の絶対値に当たる費用負担をすることになっています。これはその金額も含めてクラーク税の場合と同じになります。

(2)　もし$|w_i| \geq \left|\sum_{j \neq i} w_j\right|$かつ$\sum_{j \neq i} w_j > 0 > w_i$ならば，$\sum_i w_i < 0$ なので，$t_i = -\sum_{j \neq i} w_j < 0$となります。$\sum_{j \neq i} w_j > 0$なのでプレーヤー$i$は$\sum_{j \neq i} w_j$の絶対値に等しい額を支払うことになります。この場合，$\sum_i w_i < 0$ なので$G = 0$となり公共財が供給されませんが，プレーヤーiの表明する需要w_iの絶対値は，プレーヤーi以外の表明する需要の合計$\sum_{j \neq i} w_j$の絶対値より大きく，プレーヤーi以外の希望に反して公共財を供給したくないというプレーヤーiの希望が実現するので，プレーヤーiはプレーヤーi以外の表明する需要の合計の絶対値に当たる費用負担をすることになりますが，これはその金額も含めてクラ

ーク税の場合と同じになります。

(3)　それ以外の場合は$t_i=0$であり，これもクラーク税の場合と同じになります。

したがって，この場合の課税関数t_iはピボタル・メカニズムにおけるクラーク税と同じになります。

以上から，ピボタル・メカニズムはグローブス・メカニズムの特殊ケースとなっていることがわかります。

補論 2.4　**結果** 2.6 **の証明**（Laffont and Maskin, 1980）

耐戦略性とボーエン＝サミュエルソン条件を満たすメカニズムはグローブス・メカニズムであることを証明します。議論の単純化のため，公共財の供給水準Gは連続的な変数であるとします。また，各プレーヤーiの公共財からの便益関数$v_i(G)$および課税関数t_iは連続で一階微分可能とします。また，公共財の生産費用は$c(G)=0$に基準化されているとします。

n人のプレーヤーが参加していて，各プレーヤーiの表明した便益関数w_iに対して，各プレーヤーiの利得関数は以下のようになります。

$$\pi_i(x_i,G)=x_i+v_i(d(w))+t_i(w)$$

第 1 項は私的財から得られる利得，第 2 項は各プレーヤーの表明した便益関数プロファイル$w=(w_1,\cdots,w_n)$に基づいて決定関数$d(w)$によって決定された公共財供給水準に従ってプレーヤーiが受け取る便益，第 3 項は課税関数です。

公共財メカニズムは耐戦略性を満たすので，各プレーヤーiについて，$w_i=v_i$のとき各自の利得が最大化されているはずです。言い換えれば，各プレーヤーiの利得関数を偏微分した偏導関数が$w_i=v_i$において極値を取る必要があります。つまり，

$$\left.\frac{\partial\pi_i}{\partial w_i}\right|_{w_i=v_i}=0$$

が成り立つはずです。実際に微分を実行すると，つぎの条件がすべてのプレーヤーiついて成り立つはずです。

$$\frac{\partial v_i(G)}{\partial G}\cdot\frac{\partial d(v)}{\partial v_i}+\frac{\partial t_i(v)}{\partial v_i}=0 \tag{2.14}$$

さらに，ボーエン＝サミュエルソン条件が満たされるので，各プレーヤーが公共財から受ける限界便益の和が限界費用に等しくなります。ここでは限界費用＝ 0 であることに注意すれば，ボーエン＝サミュエルソン条件は

$$\frac{\partial v_i(G)}{\partial G}\cdot\frac{\partial d(v)}{\partial v_i}+\sum_{j\neq i}\frac{\partial v_j(G)}{\partial G}\cdot\frac{\partial d(v)}{\partial v_j}=0 \tag{2.15}$$

と表せます。ここで，左辺第 1 項はプレーヤーiの限界便益，第 2 項はi以外のプレーヤーの

限界便益の和になります。式(2.14)から(2.15)を引き算して整理すると,

$$\frac{\partial t_i(v)}{\partial v_i} = \sum\nolimits_{j \neq i} \frac{\partial v_j(G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial d(v)}{\partial v_j}$$

この式の両辺をv_iについて積分すると,

$$\int \frac{\partial t_i(v)}{\partial v_i} dv_i = \int \sum\nolimits_{j \neq i} \frac{\partial v_j(G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial d(v)}{\partial v_j} dv_i + h(v_{-i})$$

ここで$h(v_{-i})$はv_{-i}に関する任意関数です。便益関数$v_i(G)$は連続関数なので，上の式の右辺第1項は積分と和の順序を入れ替えることができるので，結局

$$t_i = \sum\nolimits_{j \neq i} v_j\big(d(v)\big) + h(v_{-i})$$

が得られます。こうして得られたのは，グローブス・メカニズムにおける課税関数t_iにほかなりません。

こうして，耐戦略性とボーエン=サミュエルソン条件を満たすメカニズムはグローブス・メカニズムになることがわかりました。

補論 2.5　グローブス＝レジャードのメカニズム

ウォーカー・メカニズム以外に，各プレーヤーがナッシュ均衡をプレーするという前提の下に，ボーエン=サミュエルソン条件と予算均衡条件を満たすメカニズムに，グローブス=レジャードのメカニズムがあります(Groves and Ledyard, 1977)。

まず，n人($n \geq 3$)のプレーヤーがいて，各プレーヤーiは，自分にとって望ましい公共財供給水準そのものではなく，公共財に対する追加需要x_iを表明します。それで，すべてのプレーヤーが表明した追加需要の合計$G = \sum_i x_i$に当たる水準の公共財が供給されることになります。また，qを公共財1単位当たりの生産費用（限界費用）とします。つまり，公共財の生産費用は$c(G) = qG$ということです。いま，$S_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j$をプレーヤー$i$以外の追加需要の合計，$\mu_i = \frac{S_{-i}}{n-1}$をプレーヤー$i$以外の追加需要の平均，$\sigma_i^2 = \sum_{j \neq i} \frac{(x_j - \mu_i)^2}{n-2}$をその分散とすると，グローブス=レジャードのメカニズムの下では各プレーヤーiは以下の費用を負担させられます。

$$c_i(x_i) = \frac{X}{n} q + \frac{\gamma}{2} \cdot \left\{ \frac{n-1}{n} (x_i - \mu_i)^2 - \sigma_i^2 \right\}$$

ここで，γは定数です。公共財供給水準Gに対してプレーヤーiが受け取る便益を$v_i(G)$とすると，プレーヤーiは他のプレーヤーの追加需要の合計S_{-i}を所与として利得$\pi_i = v_i(G) - c_i(x_i)$を最大にするような$x_i$を選ぶことが最適反応になります。よって，ナッシュ均衡では

$$\frac{\partial v_i(G)}{\partial x_i} = \frac{dc_i(x_i)}{dx_i}$$

となります。このとき,

$$\frac{dc_i(x_i)}{dx_i} = \frac{q}{n} + \gamma \frac{n-1}{n}(x_i - \mu_i)$$

であることと，

$$\sum_i \mu_i = \sum_i \frac{\sum_{j \neq i} x_j}{n-1} = \frac{(n-1)\sum_i x_i}{n-1} = \sum_i x_i$$

であることから，

$$\sum_i \frac{\partial v_i(G)}{\partial x_i} = \sum_i \frac{dc_i(x_i)}{dx_i} = q + \gamma \frac{n-1}{n}\left(\sum_i x_i - \sum_i \mu_i\right) = q$$

となり，ナッシュ均衡において，各プレーヤーの限界便益の和が公共財供給のための限界費用qに等しいというボーエン＝サミュエルソン条件が満たされています。

さらに，$q = 0$ならば$c_i(x_i) = 0$であることや

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 1$$

であることと，$c_i(x_i)$は連続関数なので和と積分の順序を交換できることを使うと，

$$\sum_i c_i(x_i) = \sum_i \int \frac{dc_i(x_i)}{dx_i} dx_i = \int \sum_i \frac{dc_i(x_i)}{dx_i} dx_i \cdot \frac{dG}{dx_i} = \int q\, dG = qG$$

が成り立ちます。したがって，予算均衡条件が満たされていることがわかります。

ただし，一般的には，グローブスとレジャードのメカニズムにおけるナッシュ均衡が一意ではないこと(Bergstrom et al., 1983)や，均衡における利得が非負であるという個人合理性が満たされないこと，プレーヤーの数が増えると動学的に不安定になること(Muench and Walker (1983))などの欠点が指摘されています。

（参考文献）

・Bergstrom, T., C. P. Simon, and C. J. Titus (1983) “Counting Groves-Ledyard equilibria via degree theory.” *Journal of Mathematical Economics* 12(2), 167 184.

・Groves, T. and J. Ledyard (1977) “Optimal allocation of public goods: a solution to the ‘free rider problem’.” *Econometrica* 45(4), 783 809.