『組織の経済学』ウェブ付録：第 12 章

12.1　ハーマリン・モデルの定式化

この付録では, ハーマリンの率先垂範型リーダーシップの理論モデルをより一般的に説明する。N 人からなるチームを考える。各メンバーが努力水準 e_i を投資することで, チームの生産物が生まれ, その価値 x は第 2.1 項で導入したものを一般化して,

$$x = \theta(e_1 + \cdots + e_N) = \theta \sum_{i=1}^{n} e_i$$

で決定されるとする。努力コスト c_i は $c_i = (1/2)e_i^2$ で生じるものとする。個人の利得は, x をメンバーの間でシェアした際の自分の取り分を報酬とし, そこから努力コストを引いたものとして与えられる。

いま, チームでの役割分担として, N 人のうち 1 人がリーダーとしての役割を与えられており, それを L とよぶ。それ以外の $N-1$ 人がフォロワーとなる。リーダーはチームの生産性 θ を事前に観察することができるがフォロワーはそれができないとする。リーダーは, 生産性 θ に基づいて, 先んじて行動 e_L を選択する。フォロワー達は, リーダーの行動を観察した後に, 同時に行動 e_F を選択する。

ここで, リーダーの生産物におけるシェアを s_L, フォロワーのそれを s_F とし, それらが

$$s_L = \frac{1}{1+N(N-1)},\ s_F = \frac{N}{1+N(N-1)} \tag{1}$$

で与えられているものとする。任意の生産性の水準を $\hat{\theta}$ とするとき, その下でリーダーは, 努力水準を $e^*(\hat{\theta}) = \hat{e} = \frac{N}{1+N(N-1)}\hat{\theta}$ を投入し, フォロワー達がその努力水準から $\mu(\hat{\theta}|\hat{e}) = 1$ という予想を形成しつつ, リーダーの努力水準を模倣するという, 戦略と予想の組み合わせがことが完全ベイジアン均衡となる。

まず, 任意の努力水準 $\hat{e}$ を観察した後の 2 段階目のフォロワー達の意思決定から考察する。ここで, フォロワーの利得は,

$$s_F\hat{\theta}((N-1)\hat{e} + e_F) - \frac{1}{2}e_F^2$$

となるので, e_F について最大化する。そのため, 最大値を与えるフォロワーの努力水準を e_F^* とすると, 上式を e_F について微分してゼロとおいて得られる最大化の 1 階条件を満たすので,

$$\begin{aligned}
& s_F\hat{\theta} - e_F^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{N}{1+N(N-1)}\hat{\theta} - e_F^* = 0 \\
& \Leftrightarrow e_F^* = \frac{N}{1+N(N-1)}\hat{\theta}
\end{aligned}$$

となる。これはリーダーの選択する努力水準 $\hat{e}$ に他ならず, リーダーの努力水準を模倣することが最適となる。

他方, このフォロワーの模倣戦略を前提とすると, リーダーの利得は,

$$s_L\hat{\theta}(e_L+(N-1)e_L)-\frac{1}{2}e_L^2$$

となるので, e_L について最大化する。最大値を与えるリーダーの努力水準を e_L^* とすると, 最大化の1階条件より,

$$\begin{aligned}&s_L\hat{\theta}N-e_L^*=0\\&\Leftrightarrow \frac{1}{1+N(N-1)}N-e_L^*=0\\&\Leftrightarrow e_L^*=\frac{N}{1+N(N-1)}\hat{\theta}\end{aligned}$$

となり, やはり想定通り $\hat{e}$ を選択することが最適となる。

この努力水準がどのような特徴を持っているかを理解するために, リーダーの役割を行う個人が存在しない状況を考える。具体的には, 全員が生産性の水準を知っており, かつ同時に努力水準を投入する状況を考察する。この状況では, 各個人は対称的であるので, チーム生産から得られるシェアは, 等分で行われるものとする。つまり, 生産物の価値を x とすると, 各個人は $(1/n)\cdot x$ を報酬として獲得することになる。それゆえ, 各個人の利得は, 生産性の水準を $\hat{\theta}$ とすると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\cdot x-c_i\\&=\frac{1}{n}\cdot\hat{\theta}\sum_{i=1}^{n}e_i-\frac{1}{2}\cdot e_i^2\end{aligned}\tag{2}$$

となる。

次に, この状況において, 各個人がどのような努力水準を投入するかをみるために, ナッシュ均衡を調べる。ナッシュ均衡となる努力水準の組を $e^{NE}=(e_1^{NE},\cdots,e_N^{NE})$ とする。ナッシュ均衡の下で, 各個人は, 自分以外のメンバーが e_{-i}^{NE} に従っている時に, 最適な努力水準を選択しているはずである。(2) 式と最大化のための1階の条件より,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\hat{\theta}-e_i^{NE}=0\\&\Leftrightarrow e_i^{NE}=\frac{1}{n}\hat{\theta}\end{aligned}$$

となる。簡単な計算によって, $\frac{N}{1+N(N-1)}>\frac{1}{n}$ であることがわかるので, 任意の生産性の水準においてもリーダーが存在するチームにおける努力水準が, そうでない場合よりも高くなることが分かる。

さらに, 各個人の利得の総和を求めると,

$$\hat{\theta}\sum_{i=1}^{N}e_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}e_i^2$$

となる。これを最大にする各個人の努力水準 e_i^{FB} を計算すると,

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}-e_i^{FB}=0\\&\Leftrightarrow e_i^{FB}=\hat{\theta}\end{aligned}$$

となる。また, 簡単な計算によって, $1>\frac{N}{1+N(N-1)}$ となることが分かるので, リーダーが存在する

チームにおける努力水準の方が利得和最大となる努力水準に近づくので, チーム全体としてもより効率的な生産を達成できる。

12.2　第 2.2 項における表 12-1 の計算

まず, フォロワーの期待利得は

$$\frac{1}{2}(1+\mu)(e_F+e_L)-\frac{1}{2}e_F^2$$

となることを思い出そう。これは, e_F についての上に凸となる 2 次関数なので, 頂点（つまり最大値）における接線の傾きはゼロとなる。それゆえ, 最大値におけるフォロワーの努力水準を e_F^* とすると, e_F^* は () 式を e_F について微分したものに e_F^* を代入したものはゼロとなっているはずなので,

$$\frac{1}{2}(1+\mu)-e_F^*=0$$

となる。それゆえ,

$$e_F^*=e_F(\mu)=\frac{1}{2}(1+\mu)$$

となる。また, このフォロワーの最適な努力水準を所与として, リーダーの期待利得は

$$\frac{1}{2}\theta\Big\{e_L+\frac{1}{2}(1+\mu)\Big\}-\frac{1}{2}e_L^2 \tag{3}$$

となる。それゆえ, 最適な努力水準は

$$e_L^*=\frac{1}{2}\theta$$

となる。したがって, これを (3) 式に代入すると, リーダーの最大利得 $u(\mu,\theta)$ は

$$u(\mu,\theta)=\theta\times\frac{\theta+2(1+\mu)}{8}$$

となる。特に, この式をもとにして,

$$\begin{aligned}u(1,\theta)&=\frac{\theta}{8}(\theta+4)\\u(0,\theta)&=\frac{\theta}{8}(\theta+2)\\u\Big(\frac{1}{2},\theta\Big)&=\frac{\theta}{8}(\theta+3)\end{aligned}$$

という計算が成り立つことになり, これにより表 12-1 が求まる。

12.3　第 2.2 項における (3) 式の一般化と含意

(3) 式を高生産性の確率を p として一般化する。ここで, $u(p,\theta)$ は

$$u(p,\theta)=\theta\times\frac{\theta+2(1+p)}{8}$$

となることに注意すると, (3) 式は

$$\underbrace{p \cdot (3/2) + (1-p) \cdot (3/8)}_{\text{逸脱で失われる協調利得}} - \overbrace{\Big[p \cdot \theta_H \cdot \underbrace{\frac{\theta_H + 2(1+p)}{8}}_{=u(p,\theta_H)} + (1-p) \cdot \theta_L \cdot \underbrace{\frac{\theta_L + 2(1+p)}{8}}_{=u(p,\theta_L)}\Big]}^{\text{逸脱しても得られる懲罰利得}} \tag{4}$$

となる。これを図示したものが, 図 1 である。

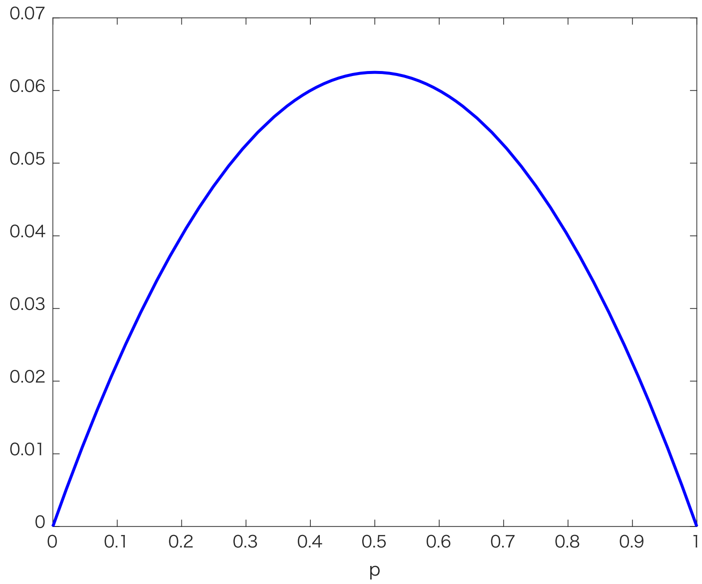

図 1　逸脱による純損失と p との関係

この図 1 より明らかに, $p = 0$ と $p = 1$ の時に (4) 式はゼロとなっている。これは, チームが直面する生産性についての不確実性が全くない状況に対応している。例えば, $p = 1$ というのは, 確実に生産性が高い状態 (θ_H) が実現することを意味している。それゆえ, 長期的関係において適切にリーダーが情報を正確に伝えられても, そうではなくても確実にチームが直面する状態がわかるので, 逸脱による損失はゼロとなる。これは, $p = 0$ の場合も同じ論理が当てはまる。

反対に, $p = 1/2$ の場合は, 長期的関係において適切にリーダーが情報を伝えないと, 他のメンバーはどちらの状態が起こりやすいかすら分からない状況におかれる。それゆえ, 逸脱による損失が最大となるのである。これは, 裏を返せば, $p = 1/2$ においては, 長期的関係によって協調的に情報を正しく伝えるインセンティブがリーダーには存在していることを意味している。