『組織の経済学』ウェブ付録：第 9 章

9.1　完全ベイジアン均衡の定式化

この付録では, 本書第 9 章第 3 節で導入した完全ベイジアン均衡をさらに, 数学的に定式化していく。あるプレーヤー i の行動戦略 (Behavior Strategy)b_i とは, ある情報集合 I において利用可能な行動に割り振られた確率分布のことである。つまり, 任意の情報集合 I とそこで利用可能な任意の行動 a について, $0 \leq b_i(a, I) \leq 1$ となり, 情報集合 I において利用可能なすべての行動について足し合わせると 1 となるという条件を満たすものである。また, すべてのプレーヤーの行動戦略の組を b で表すものとする。

$\mu(x)$ を意思決定点 x における予想 (Belief) とする。x を含む情報集合のなかのすべての意思決定点について予想を足し合わせると 1 となる。これをすべてのプレーヤーのすべての情報集合について集めたものを, 予想の体系 (a System of Beliefs) といい, μ でそれを表す。

ここで, (μ, b) を**アセスメント** (Assesment) と呼ぶことにする。行動戦略 b のもとで正の確率で到達する情報集合を経路上にある情報集合といい, そうでない情報集合を経路外にある情報集合とよぶ。

条件 1　アセスメント (μ, b) について, 経路上にある情報集合については, 予想 μ は b によって導かれる確率分布をもとにベイズの定理によって計算された確率分布と一致している。

条件 2　アセスメント (μ, b) について, 経路外にある情報集合については, 予想 μ はベイズ定理が利用可能な時はベイズ定理に従うが, そうでない場合はその必要はなく, 結果として任意の予想を形成することができる。

条件 3　アセスメント (μ, b) が逐次合理的である。つまり, すべてのプレーヤー i のすべての情報集合において, 予想 μ と他のプレーヤーの行動戦略 b_{-i} を所与として b_i に従うことが最適反応となっているということである。

条件 1 から 3 を満たすアセスメント (μ, b) を完全ベイジアン均衡とよぶ。

9.2　第 5.2 項の確率計算

事業部 A が X1 を選択したことを観察し, シグナル g を受け取ったときの事業部 B の予想の更新は,

$$P(Good|X1, g) = \frac{P(Good)\{P(g|Good)\}^2}{P(X1, g)} \tag{1}$$

として計算される。他方, 事業部 B にとっては, 事前分布が $P(Good)$ から事業部 A の事後確率 $P(Good|g)$ に変化したものとして捉え直して計算すると, 予想は

$$\frac{P(Good|g)P(g|Good)}{P(Good|g)P(g|Good) + P(Bad|g)P(g|Bad)} \tag{2}$$

となり, これは (1) 式と等しくなることを 5.2 節で紹介した。ここでは, 上述の両者がなぜ一致するかを厳密に示す。

ベイズの定理より, $P(Good|g) = \frac{P(Good)P(g|Good)}{P(g)}$ なので, (2) 式は,

$$\frac{P(Good)\{P(g|Good)\}^2}{P(g)\{P(Good|g)P(g|Good) + P(Bad|g)P(g|Bad)\}} \tag{3}$$

となる。(3) 式の分母は,

$$\begin{aligned}
&P(g)\{P(Good|g)P(g|Good) + P(Bad|g)P(g|Bad)\} \\
&= P(g)P(Good|g)P(g|Good) + p(g)P(Bad|g)P(g|Bad) \\
&= P(Good)P(g|Good)P(g|Good) + P(Bad)P(g|Bad)P(g|Bad) \\
&= P(Good)\{P(g|Good)\}^2 + P(Bad)\{P(g|Bad)\}^2 \\
&= P(X1, g)
\end{aligned}$$

となる。上式の 2 番目の等号は, ベイズの定理より

$$\begin{aligned}
P(g)P(Good|g) = P(Good)P(g|Good) \\
P(g)P(Bad|g) = P(Bad)P(g|Bad)
\end{aligned}$$

となるからである。

以上より, (2) 式は,

$$\frac{P(Good)\{P(g|Good)\}^2}{P(X1, g)}$$

となり, (1) 式と一致する。