

第 10 章・補論 3：掛け算の変化率と成長会計の導出^{*1}

成長会計を数学的に厳密では無いですが，簡単な導出を紹介します。準備として，掛け算の変化率は，変化率の和で表せることを利用しましょう。次の例で説明しましょう。 $z = xy$ という二つの変数の掛け算からなる z を考えると， z の変化率 $\frac{\Delta z}{z}$ を求めてみましょう。 x の変化と y の変化を合わせたものが z の変化に相当します。 x の変化分を Δx ， y の変化分を Δy とするとき， $z = xy$ の変化率は

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{z} &= \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy}{xy}, \\ &= \frac{xy + \Delta x \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y - xy}{xy} \\ &= \frac{\Delta x \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y}{xy}\end{aligned}$$

と書くことができる。ここで小さい数字同士の積である $\Delta x \Delta y$ は非常に小さい数字であることから，ほぼ 0 として無視することにとすると，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{z} &\approx \frac{\Delta x \times y + x \times \Delta y}{xy} \\ \Rightarrow \frac{\Delta z}{z} &\approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\end{aligned}$$

を得る。つまり x と y の積である z の変化率は， x の変化率と y の変化率の和として表せます。具体的に数字の例を見てみましょう。下の表では，二行目と三行目において今年の x と y の値，および翌年の x と y の値，そして $x \times y$ の値を表示しています。四行目では，それぞれの変化率を示しています。 x の変化率は 3%， y の変化率は 5% です。このとき， $x \times y$ の変化率は 8.15% と，約 8% になっており，上記の近似が概ね良いことを確認できます。

^{*1} ©2015, Ryoji Hiraguchi, Masaru Inaba. Printed in Japan

	x	y	$x \times y$
今年	100	2.0	200.0
翌年	103	2.1	216.3
変化率	3%	5 %	8.15% $\approx$ 8%

さて，以上の知識を踏まえて成長会計を導出してみましょう。生産関数は少し一般的に α のままのコブ・ダグラス型生産関数を用います。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

A は全要素生産性です。今 K^{α} は， K を α 回掛けあわせたものですから，コブ・ダグラス型生産関数は次の掛け算と読み替えることができます。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \underbrace{A}_{1 \text{ 回}} \times \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\alpha \text{ 回}} \times \underbrace{L \times \cdots \times L}_{1-\alpha \text{ 回}}.$$

先ほどのにある「掛け算の変化率は，変化率の和で表せる」という性質を利用すると，以下のように各項の変化率の和に書き直すことができます。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y}{Y} &= \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{1 \text{ 回}} + \underbrace{\frac{\Delta K}{K} + \cdots + \frac{\Delta K}{K}}_{\alpha \text{ 回}} + \underbrace{\frac{\Delta L}{L} + \cdots + \frac{\Delta L}{L}}_{1-\alpha \text{ 回}}, \\ \Rightarrow \frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \frac{\Delta L}{L}. \end{aligned}$$

この式は，GDP の成長率 $\frac{\Delta Y}{Y}$ を，全要素生産性の貢献部分 $\frac{\Delta A}{A}$ ，資本の貢献部分 $\frac{\Delta K}{K}$ ，労働の貢献部分 $\frac{\Delta L}{L}$ に要因分解したものです。技術の貢献部分 $\frac{\Delta A}{A}$ について解くと，

$$\underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\text{全要素生産性の変化率}} = \underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\text{GDP の変化率}} - \underbrace{\left[\alpha \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \frac{\Delta L}{L} \right]}_{\text{資本と労働の貢献部分}}$$

を得ることができます。

対数の性質を利用する

対数を知っている人は、もっと計算が簡単になります。いま対数の底をネイピア数 e とした自然対数を $\ln x \equiv \log_e x$ と表記することにします。対数の計算方法をまとめると以下ようになります。証明等は数学の教科書に譲ることにし、ここでは以下の性質を利用するだけにします。

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^a) = a \ln x$
- $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$
- $\frac{d \ln(x_t)}{dt} = \frac{d \ln(x_t)}{dx_t} \times \frac{dx_t}{dt} = \frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$

最後の一つは、時間と共に変化する x_t という変数に対数を取った $\ln(x_t)$ を時間 t で微分したものです。 $\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$ は x の変化率を意味し、先ほどの説明の $\frac{\Delta x}{x}$ とほぼ同じものを意味していると考えて差し支えありません。

生産関数の両辺に対数を取ると、

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \\ \implies \ln Y_t = \ln A_t + \alpha \ln K_t + (1 - \alpha) \ln L_t$$

ここで両辺を時間 t について微分すると、

$$\frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} = \frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t} + \alpha \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} + (1 - \alpha) \frac{\frac{dL_t}{dt}}{L_t} \\ \implies \frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t} = \frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} - \left[\alpha \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} + (1 - \alpha) \frac{\frac{dL_t}{dt}}{L_t} \right]$$

を得ます。 $\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$ は x の変化率を意味し、先ほどの説明の $\frac{\Delta x}{x}$ とほぼ同じものを意味しています。厳密な説明ではありませんが、誤解を恐れず置き換えま

しょう。

$$\underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\text{全要素生産性
の変化率}} = \underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\text{GDP の
変化率}} - \underbrace{\left[\alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} \right]}_{\text{資本と労働の貢献部分}}$$

先ほど導出した成長会計の式を得ることができます。