ウェブ補論　第 10 章

目次

補論 10.1 対数グラフの意味

以下では，　10 章の図 10.2 において縦軸を対数を取った変数とし，グラフの傾きの程度がその成長率になっていると説明しました。その理由について，紹介します。

いま時間とともに変化する変数y_tが，次のような時間tの関数として表現できるとします。

$$y_t = y_0 e^{gt}$$

ここでeはネイピア数，y_0とgは定数とします。。このような定式化を行うと，y_tは初期値がy_0，成長率がgで時間とともに変化する変数であることがわかります。実際，$t=0$を代入すると，

$$y_t|_{t=0} = y_0 e^{g0} = y_0 \times 1 = y_0$$

となり，確かに初期値がy_0となっていることが確認できます。また，補論 10.4 で学んだように自然対数値を取り，時間tで微分すると，

$$\frac{d\ln(y_t)}{dt} = \frac{\frac{dy_t}{dt}}{y_t} = \frac{gy_0e^{gt}}{y_t} = g$$

となり，確かにgが成長率になっていることがわかります。

ここまでは連続時間の変数y_tについて考察しましたが，次のようにあたかも離散時間かのような近似による考察を行うことで，対数グラフの意味を考えてみます。いまy_tとそこから 1 期間離れたy_{t+1}を考えます。

$$y_t = y_0 e^{gt}$$
$$y_{t+1} = y_0 e^{g(t+1)}$$

両者の両辺に対数を取ると，補論 10.4 で紹介した対数の性質より，

$$\ln(y_t) = \ln(y_0) + \ln(e^{gt}) = \ln(y_0) + gt\ln(e) = \ln(y_0) + gt$$
$$\ln(y_{t+1}) = \ln(y_0) + \ln(e^{g(t+1)}) = \ln(y_0) + g(t+1)\ln(e) = \ln(y_0) + g(t+1)$$

(ここで，$\ln(e) = 1$となる対数の性質も利用しています)。ここで，$t+1$期からt期について両辺引き算をすると，

$$\ln(y_{t+1}) - \ln(y_t) = \ln(y_0) + g(t+1) - [\ln(y_0) + gt\,] = g$$

となります。**これは，ある変数について対数を取り，1 期間離れた 2 時点の差をとると，そ**

の 1 期間分の成長率になっていることを意味します。

もし 2 期間離れている場合は,

$$\ln(y_{t+2})-\ln(y_t)=\ln(y_0)+g(t+2)-[\ln(y_0)+gt\,]=2g$$

より,

$$\frac{\ln(y_{t+2})-\ln(y_t)}{2}=g$$

となります。一般に，τ期間離れている場合は,

$$\frac{\ln(y_{t+\tau})-\ln(y_t)}{\tau}=g$$

と表すことができます。これは,

$$\frac{\text{対数を取った値の差}}{\text{二つの時点の期間}}=\text{単位期間を 1 としたときの二つの時点の成長率}$$

を意味します。横軸を時間 t とする図 10.2 においては, 上の式の左辺は「グラフの傾き」になります。よって, グラフの傾きが, その期間の成長率であると解釈することができます。

補論 10. 2 資本の限界生産性についての補足

以下では、資本の限界生産性 MPK についての追加の説明を行います。

コブ・ダグラス型生産関数の例として$Y=\sqrt{KN}$を取り上げ、この生産関数について，資本の限界生産性を考えます。資本の限界生産性 MPK とは，生産において投入する労働を一定としたまま，資本の投入を追加的に 1 単位増やしたときの，生産の増加分のことをいいます。よって，テキストの定義に従えば,

$$\mathrm{MPK}=\sqrt{(K+1)\times N}-\sqrt{K\times N}$$

と表すことができます。テキストでは，簡単のため，労働は一人，つまり N=1 で一定としています。このとき，上記のコブ・ダグラス型生産関数は$Y=\sqrt{K}$とあらわせます。資本の限界生産性 MPK は、資本 K を 1 単位増やした場合の生産量の増加分に等しく、N=1 で生産関数が$Y=\sqrt{K}$のとき,

$$\mathrm{MPK}=\sqrt{K+1}-\sqrt{K}$$

と表すことができます。

さて，労働 N=1 のときは，$k=\frac{K}{N}=\frac{K}{1}=K$より，一人当たり資本$k$と経済全体の資本 K は同じになります。よって, 以下では一人当たりの生産関数$y=\sqrt{k}$を使って資本の限界生産性を,

$$\mathrm{MPK}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

と表すことにします。

以下では、テキストにおいて,「微分を用いて限界生産性を考える場合には，N=1 のときに限らずに，この式の関係が成立します」と述べた点、つまり微分を用いる場合 MPK は 1

人当たり資本 k を用いて表現できる点について解説をします。

・偏微分を用いた限界生産性の定義

テキストでは簡単化のために微分を用いませんでしたが，限界生産性を偏微分を用いて定義することがあります。いま，一般に生産関数を$Y=F(K,N)$とします。ここで，テキストの限界生産性の定義を別の表現に言い換えると，「資本の限界生産性 MPK とは，生産において投入する労働を一定としたまま，追加的な資本 1 単位の増加に対する生産の増加分」ということができます。つまり，

$$\mathrm{MPK}=\frac{\text{生産の増加分}}{\text{資本の増加分}}=\frac{F(K+1,N)-F(K,N)}{1}$$

を意味します。テキストでは簡単化のため分母の 1 を省略して紹介をしています。

ここで，資本の増加分を 1 に限定せず，より一般的にΔKと書くことにしましょう。すると，右辺は

$$\frac{F(K+\Delta K,N)-F(K,N)}{\Delta K}$$

と書き直すことができます。以下では、微分を用いて限界生産性を定義する場合を考え、ここで，ΔKを限りなくゼロに近づけたものを，資本の限界生産性 MPK とすることにします。

$$\mathrm{MPK}=\lim_{\Delta K\to 0}\frac{F(K+\Delta K,N)-F(K,N)}{\Delta K}$$

右辺は生産関数$Y=F(K,N)$について，資本 K についての偏微分により求めた偏導関数になります。そのため，偏微分の記法を利用して，

$$\mathrm{MPK}=\frac{\partial F(K,N)}{\partial K}=F_K(K,N)$$

のように書きます。同様にして，労働の限界生産性も偏微分を用いて次のように求めることが可能です。

$$\mathrm{MPK}=\lim_{\Delta N\to 0}\frac{F(K,N+\Delta N)-F(K,N)}{\Delta N}=\frac{\partial F(K,N)}{\partial N}=F_N(K,N)$$

・一人当たりの生産関数と収穫一定

一般に生産関数を$Y=F(K,N)$としたときの一人当たりの生産関数を求めてみましょう。ここで必要な仮定として，経済学でよく用いられる「規模に関して収穫一定」という仮定を生産関数について追加します。いまある正の実数を z とします。このとき，規模に関して収穫一定とは，資本と労働のそれぞれの投入量を z 倍するとき，生産させる生産量がもとの生産量の z 倍になるという性質のことです。投入する資本と労働をそれぞれ z 倍するということは，生産規模を z 倍することを意味します。生産規模を z 倍にすると，生産量も z 倍になる関係と言い換えることもできます。規模に関して収穫一定は，生産関数を用いて次のよう

に表現できます。

$$zY = F(zK, zN)$$

　この性質を用いると，一人当たりの生産関数を求めることができます。上の式に$z = \frac{1}{N}$を代入すると，

$$\frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right) = F\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$

を得ます。ここで，$y = \frac{Y}{N}$および$k = \frac{K}{N}$とおくと，

$$y = F(k, 1) = f(k)$$

という生産関数を得ることができます。投入されている労働は 1，投入されている資本は一人当たり資本kになっており，得られる生産量は一人当たり生産量yとなっていることから，この関係を「一人当たり生産関数」と考えることができます。労働の投入量が 1 で固定のため，記法を簡単にするために，上の式の 2 つ目の等号を使って$y = f(k)$と書き換えることがあります。

・一人当たりの生産関数と MPK の関係

最後に，一人当たり生産関数$y = f(k)$を一人当たり資本kで微分したものが，MPK に等しくなることを示します。

$$f'(k) = \frac{df(k)}{dk} = \frac{dF(k,1)}{dk} = \frac{dF\left(\frac{K}{N}, 1\right)}{dk} = \frac{d\frac{1}{N}F(K,N)}{dk} = \frac{1}{N}\frac{\partial F(K,N)}{\partial K}\frac{dK}{dk}$$

と書くことができます。$k = \frac{K}{N}$であることから，$\frac{dK}{dk} = \left(\frac{dk}{dK}\right)^{-1}$が成立します。よって

$$f'(k) = \frac{1}{N}\frac{\partial F(K,N)}{\partial K}\left(\frac{dk}{dK}\right)^{-1} = \frac{1}{N}\frac{\partial F(K,N)}{\partial K}N = \frac{\partial F(K,N)}{\partial K} = MPK$$

例 : 生産関数$Y = \sqrt{KN}$のときを考えます。まず，規模に関して収穫一定であることを確認するため，KとNを z 倍してみましょう。このとき、

$$\sqrt{zKzN} = z\sqrt{KN} = zY$$

となり，規模に関して収穫一定であることが確認できました。一般にコブ・ダグラス型生産関数$Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha}$について，規模に関して収穫一定であることは，次のように示すことができます。

$$(zK)^{\alpha}(zN)^{1-\alpha} = z^{\alpha}K^{\alpha}z^{1-\alpha}N^{1-\alpha} = zK^{\alpha}N^{1-\alpha} = zY$$

　さて，資本の限界生産性は，$Y = \sqrt{KN} = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$については，

$$\mathrm{MPK} = \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$$

となります。一方，一人あたり生産関数$y = f(k) = \sqrt{k}$を微分すると，

$$f'(k)=\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{K}\right)^{\frac{1}{2}}=MPK$$

となります。確かに一人当たり生産関数を一人当たり資本kで微分したものが，MPK に等しくなっています。

補論 10. 3 資本の黄金律水準

貯蓄率が高いほど，定常状態での一人当たり生産量（所得）が高いことを示しました。では貯蓄率は高いほどよいでしょうか？一人当たり生産量が最も高くなるのは，貯蓄率が100％のときです。このとき，いっさいの消費をせず，すべて貯蓄に回しているため，投資そして資本の量も最大となり，その結果として定常状態での生産能力は最も高くなります。しかし，いっさい消費しないとは，何も飲み食いせず，ただ蓄えているだけです。これは，イソップ寓話に出てくるミダス王のようです。話の中では，ミダス王が触れるものはすべて金になりました。その結果，金は貯まっていきますが，食べ物や飲み物も金になってしまうため，王は何も飲み食いができませんでした。このような状況をよいとはいえないのではないでしょうか。

私たちは食事をしたり，購入したテレビを見たりなど，消費をすることで初めて満足感を得ることができます。経済学ではこの満足感の程度のことを効用とよびます。いくら給料が高くても，お金を使うことができなければ，そこから効用を得ることはできないのです。そのため所得を最大にすることよりも，効用を得ることができる「消費」を最大にすることが大事なのです。そこで定常状態での消費を最大にするような資本の水準を望ましい水準であるという意味で，「資本の黄金律水準」と呼ぶことにしましょう。

所得のうち消費をした残りが貯蓄であるという関係から，一人当たり消費は，

$$\underbrace{c}_{\text{一人当たり消費}}=\underbrace{\sqrt{k}}_{\text{一人当たり生産量（所得）}}-\underbrace{s\sqrt{k}}_{\text{一人当たり貯蓄(投資)}}$$

と書くことができます。ここで定常状態だけに注目をします。定常状態では$s\sqrt{k^*}=\delta k^*$という関係があります。これを利用すると，

$$c^*=\sqrt{k^*}-s\sqrt{k^*}=\sqrt{k^*}-\delta k^*$$

です。この定常状態の消費 c^*を最大にすることで黄金律水準を達成できます。

いま，ある水準の k^*から 1 単位資本が大きくなるとき，消費 c^*の変化分 Δc^*には二つの影響があります。第一の影響は，k^*を追加で 1 単位増やしたときの生産量の増加分ですが，これは資本の限界生産性 MPK= $\sqrt{k^*+1}-\sqrt{k^*}$になります。第二の影響は，資本を 1 単位追加したときの貯蓄，つまり投資の増加分ですが，これは定常状態において固定資本減耗の増加分 δ になります。これらを合わせると，消費の変化分は $\Delta c^*=\mathrm{MPK}-\delta$ と書くことができます。

c^*と k^*の関係については，Δc^*の値により，三つのケースが考えられます。

① $\Delta c^*>0$ のとき，k^*を増やした方が，c^*は大きくなる

② $\varDelta c^*<0$ のとき，k^*を減らした方が，c^*は大きくなる

③ $\varDelta c^*=0$ のとき，c^*は最大になる

①では k^*が小さすぎるため k^*を増やしたほうがよく，②では k^*が大きすぎるため k^*を減らしたほうがよい。よって，これらの間にある③を満たすような k^*のときに，c^*は最大になります。

③より，定常状態の消費を最大にする条件は，$\varDelta c^*=\mathrm{MPK}-\delta=0$，つまり $\mathrm{MPK}=\delta$ となります。この条件を満たすような資本 k^*の水準が，消費を最大にするような**黄金律水準**となります。ここでいう黄金とは，触るものすべてが黄金になるミダス王の寓話における黄金とは異なり，最も高い消費を続けることができる最も望ましい水準であるという意味で使われています。

POINT　資本の黄金律水準

定常状態の消費を最大にする一人当たり資本の水準は，次の条件を満たすような k^*のこと。

$$\underbrace{MPK}_{\text{資本の限界生産性}} = \underbrace{\delta}_{\text{固定資本減耗率}}$$

実は，このポイントの結果は，資本の限界生産性を MPK= $\sqrt{k^*+1}-\sqrt{k^*}$という離散的な定義ではなく，微分を用いて定義する場合に黄金律水準の資本の値を解析的に求めることができます。(MPK の微分を用いた定義については「資本の限界生産性について」を参照してください。）いま生産関数は，$y=\sqrt{k}=k^{\frac{1}{2}}$ですから，

$$MPK=\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}$$

となります。以上から，資本の黄金律水準は次の関係を満たすk^*になります。

$$\frac{1}{2}(k^*)^{-\frac{1}{2}}=\delta$$

よって，

$$k^*=(2\delta)^{-2}$$

を得ます。一人当たりの消費は$c^*=\sqrt{k^*}-\delta k^*=\frac{1}{2\delta}-\delta\frac{1}{(2\delta)^2}=\frac{1}{4\delta}$です。一人当たりの生産量 $y^*=\sqrt{k^*}=\frac{1}{2\delta}$から，黄金率水準の貯蓄率は，$s_g=\frac{y^*-c^*}{y^*}=\frac{\frac{1}{2\delta}-\frac{1}{4\delta}}{\frac{1}{2\delta}}=1-\frac{1}{2}=0.5$です。つまり，この例では，望ましい貯蓄率は 50%であることが計算により求まります。

補論 10. 4 人口成長のあるソロ−モデル

人口が増加することは，その分だけ生産に貢献する労働 N が増え，生産能力が高まることになります。実は人口成長が経済成長に与える影響は簡単ではありません。経済全体では，生産要素である労働が増えていくことは生産能力を高めます。しかし生活水準，つまり一人当たり所得を考える場合はその限りではありません。経済全体の資本が一定のときには，人口が増えることによって，一人が利用できる資本が少なくなってしまうため，一人当たりの生産量はむしろは減ってしまいです。例えば，ある年にそれまで一人しかいなかった島の経済に，もう一人新しく島民が増えたとしましょう。すると，その島の経済で使える一人当たりの資本は半分になってしまいます。人がたくさん増えれば，その分だけ一人が利用できる機械や設備が少なくなるため，一人当たりの生産能力はかえって下がってしまうのです。ここでは，ソローモデルに経済成長の要因として人口成長を追加して，人口成長の効果を分析してみましょう。

ソロ−モデルのように時間を通じたモデルのことを，経済学では動学モデルと呼びます。時間の変化を表す変数をtとするときに，その表現方法には二通りあります。一つは，t =0, 1, 2, 3, …のように最小の時間単位が一定で変化するような**離散時間モデル**と呼ばれる表現です。通常は，最小の時間単位は整数で表現されます。もう一つは，時間tが連続的に変化するような**連続時間モデル**と呼ばれる表現です。前者の場合にはモデルは，差分方程式により記述されます。後者の場合には，モデルは微分方程式により記述されます。実は，テキストの本文ではこの二つの違いについて，あまり議論しないまま進めて来ました。その理由は，テキストの本文で紹介したソロ−モデルでは，ある変数xの変化をΔxと記載する場合には，離散時間モデルと連続時間モデルの定式化は同じになるためです。しかし，人口成長率を考える場合には，この二つのモデルに定式化の違いがでてくるため，テキストの本文での紹介を避けました。ここでは，この二つの違いを踏まえて，モデルを紹介していきます。

・離散時間モデルと連続時間モデルの例

ここで，準備として時間とともに変化するようなある変数xについて考えます。変数xは何を考えても構いません。例えば，株価，為替レート，GDP，失業率など，刻々と変化するような経済の変数はたくさんあります。また，経済の変数でなくとも，動いている電車や車の移動距離でも良いです。このような時間とともに変化する変数xは，時間に依存する関数と考えることができ，$x(t)$またはx_tのように書くことがあります。

（例 1）たとえば，いま時間をtで表し，その単位は 1 時間とするとき，平均時速 60km で走る車の移動距離をx_tであらわすとします。この場合，「移動距離＝速さ（平均時速）×時間」の関係から，移動距離は$x_t = 60 \times t$のように，時間に依存する関数として記述できます。$t = 1$のとき，$x_t = 60 \times 1 = 60$となり，$t = 2$のとき，$x_t = 60 \times 2 = 120$となります。いま，ある時間の変化分をΔtとします。このときの変数x_tの変化分をΔx_tとすると，

$$\Delta x_t = 60 \times \Delta t$$

という関係があります。これは時間の変化に対して，移動距離がどれだけ変化するかを表した関係です。時間tが整数であるような離散時間モデルの場合，Δtも整数になります。これを変形すると，

$$\frac{\text{距離の変化分}}{\text{時間の変化分}} = \frac{\Delta x_t}{\Delta t} = 60 = \text{速さ}$$

という関係があることがわかります。

ここで，いま離散時間モデルを考える場合には，$t = 1$から$t = 2$への時間の変化分は$\Delta t = 1$となります。このときのΔx_tは，$\Delta t = 1$に対応した変数x_tの変化分のことを意味します。そのため正確には$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$のように定義されます。よって，

$$\frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \frac{\Delta x_t}{1} = x_{t+1} - x_t = 60 \times (t+1) - 60 \times t = 60$$

というように，最小の時間単位に対する変数x_tの変化を意味します。

$$x_{t+1} - x_t = 60$$

のように，tと$t+1$といった異なる時点の変数の関係を記述した式を，**差分方程式**と呼びます。

一方，連続時間モデルの場合には，時間tが連続的に変化することから，最小の時間単位というのが存在しません。そこで，Δtを限りなく 0 に近づけるという操作をすることにします。また，このときのΔx_tは，Δtに対応した変数x_tの変化分のことを意味するため，正確には$\Delta x_t = x_{t+\Delta t} - x_t$のように定義されます。すると，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{60 \times (t + \Delta t) - 60 \times t}{\Delta t} = 60$$

となります。この操作は導関数を求める微分の操作そのものになっていますので，微分のルール通り計算すると，

$$\frac{dx_t}{\mathrm{d}t} = \frac{d(60t)}{\mathrm{d}t} = 60$$

と当然同じ結果を得ます。$\dot{x} \equiv \frac{dx_t}{\mathrm{d}t}$のように記述することもあります。

$$\frac{dx_t}{\mathrm{d}t} = 60$$

のように，連続的に変化する時間の微小な変化に対する変数x_tの変化を微分によって得た導関数を用いて表現した式を**微分方程式**と呼びます。

この例では，$x_t = 60 \times t$のように一次関数のため，あまり微分の操作という印象は受けないかもしれません。また，一次関数であると，離散時間モデルと連続時間モデルで，大きな違いが無く見えます。次の例からは少し違いが出てきます。

（例 2）今度は，時間に依存する変数であるx_tが，$x_t = at^2$のように二次関数である場合を考えます。離散時間モデルでは，

$$\frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \frac{\Delta x_t}{1} = x_{t+1} - x_t = a \times (t+1)^2 - a \times t^2 = 2at + 1$$

というように，最小の時間単位に対する変数x_tの変化も時間tに依存します。

一方，連続時間モデルの場合には，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a \times (t+\Delta t)^2 - a \times t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2at \times \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2at \times \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2at + \Delta t) = 2at$$

となります。こちらも微分のルール通りに計算すれば，

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{d(at^2)}{\mathrm{d}t} = 2at$$

となっています。

（例 3）時間に依存する変数であるx_tが，$x_t = g(t)$のような関数であるとします。ここで$g(t)$は時間tについて微分可能であると仮定します。離散時間モデルの場合には，

$$\frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \frac{\Delta x_t}{1} = x_{t+1} - x_t = g(t+1) - g(t)$$

というように，最小の時間単位に対する変数x_tの変化も時間tに依存します。

一方，連続時間モデルの場合には，

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{dg(t)}{\mathrm{d}t} = g'(t)$$

となります。

以上をまとめると，離散的に変化する時間について，x_{t+1}とx_tといった異なる時点の変数の関係を記述した式を，**差分方程式**と呼びます。一方，連続的に変化する時間について，時間の微小な変化に対する変数x_tの変化を導関数により表現した式を**微分方程式**と呼びます。

以下では，まず連続時間モデルによる人口成長のあるソローモデルを先に紹介します。微分方程式を用いて記述するものの，計算はむしろ簡単になっています。その後，離散時間モデルによる人口成長のあるソローモデルを簡単に紹介します。

連続時間モデルによる人口成長のあるソローモデル

先に連続時間モデルによる人口成長のあるソローモデルを紹介します。時間とともに変化する変数にはすべて下付きの添字tをつけることにします。テキストでは記号を簡単にするために省略していましたが，ここでは今後よりレベルの高い内容に進むことを想定して，正確に説明することとします。

生産関数はテキストと同様に$Y_t = \sqrt{K_t N_t}$とし，一人当たり生産関数については，$y_t = \sqrt{k_t}$とします。次に，これまで一定としていた人口を，時間とともに成長して増加するようなモデルに変更します。人口N_tは成長率nで増加すると仮定します。人口成長率nは一定の値で

す。よって，$\frac{\Delta N_t}{N_t}=n$より $\Delta N_t=n\times N_t$と書くことができます。微分方程式を用いると，

$$\frac{dN_t}{dt}=nN_t$$

と定式化できます。例えば，人口成長率が 2%であるとすると，$n=0.02$として，$\frac{dN_t}{dt}=0.02N_t$になります。

資本蓄積は，貯蓄率sと固定資本減耗率δを用いて，これまでと同様に投資（＝貯蓄）マイナス固定資本減耗より，経済全体では

$$\Delta K_t=sY_t-\delta K_t$$

になります。連続時間モデルの場合は，これをより正確に，

$$\frac{dK_t}{dt}=sY_t-\delta K_t$$

と表します。

それでは，この式に基づいて「一人当たりの資本蓄積」がどのように定式化できるかを説明します。一人当たりの資本ストック$k_t=\frac{K_t}{N_t}$を利用すると，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t}-n$$

と記載することができます[1]。

ここで，$\frac{dK_t}{dt}=sY_t-\delta K_t$と$Y_t=\sqrt{K_tN_t}$より，

---

[1] 商に関する微分の公式より，

$$\frac{dk_t}{dt}=\frac{d\left(\frac{K_t}{N_t}\right)}{dt}=\frac{\frac{dK_t}{dt}N_t-K_t\frac{dN_t}{dt}}{N_t^2}$$

両辺をk_tでわると，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t}=\frac{\frac{\frac{dK_t}{dt}N_t-K_t\frac{dN_t}{dt}}{N_t^2}}{\frac{K_t}{N_t}}=\frac{\frac{\frac{dK_t}{dt}N_t-K_t\frac{dN_t}{dt}}{N_t}}{K_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}-\frac{K_t\left(\frac{dN_t}{dt}\right)}{N_t}}{K_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t}-\frac{\left(\frac{dN_t}{dt}\right)}{N_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t}-n$$

を得ます。上の式の最後の等式では，$\frac{\left(\frac{dN_t}{dt}\right)}{N_t}=n$という関係を用いている。

別の方法として，対数の性質を利用して，lnを自然対数とするとき，$k_t=\frac{K_t}{N_t}$より$lnk_t=lnK_t-lnN_t$を得ます。両辺を時間tについて微分すると，対数に関する微分の公式より，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t}-\frac{\left(\frac{dN_t}{dt}\right)}{N_t}=\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t}-n$$

を得ます。

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t} = \frac{s\sqrt{K_t N_t} - \delta K_t}{K_t} - n = s\sqrt{\frac{N_t}{K_t}} - (\delta + n) = s\sqrt{\frac{1}{k_t}} - (\delta + n)$$

ここで両辺にk_tをかけて，整理すると，人口成長率 n であるときのソローモデルにおける一人当たりの資本蓄積の式である

$$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n)k_t$$

を得ます。

人口が一定のソロ−モデルとの違いは, nがあるか無いかだけです。もし仮に人口が一定だとすると，人口成長率はゼロです。つまり$n = 0$ですから，テキストの$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - \delta k_t$と同じ式になります。追加された項は，括弧を外して考えるとnk_tになります。何故この項が，一人当たりの資本蓄積にマイナスの効果をもたらすのでしょうか。その理由を考えてみましょう。いま極端な例として，当初人口が一人，つまり$N_t = 1$の経済を考えましょう。人口成長率がn より，新しく生まれてくる人数は$\Delta N_t = n \times 1 = n$で$n$人になります。この新しく生まれてきた$n$人の人たちは，当然のことながら何も持たず，機械や設備などの資本を持っていません。新しく生まれてきたn人が生産をするためには，彼ら一人ずつに一人分の資本k_tを分け与える必要が生じます。つまり，全体として今ある資本をnk_tだけ分け与えるため，この分が資本蓄積にとってはマイナス要因となります。

人口成長率nであるときのソローモデルにおける一人当たりの資本蓄積に関する振る舞いの分析は，人口が一定の場合とほとんど同じです。唯一の違いはnがあるか無いかだけです。一人当たり資本kは以下の三通りのケースのように振る舞います。

(1) $s\sqrt{k_t} > (\delta + n)k_t$のとき, 資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n)k_t > 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本$k_t$の値のときには，資本は増加します。

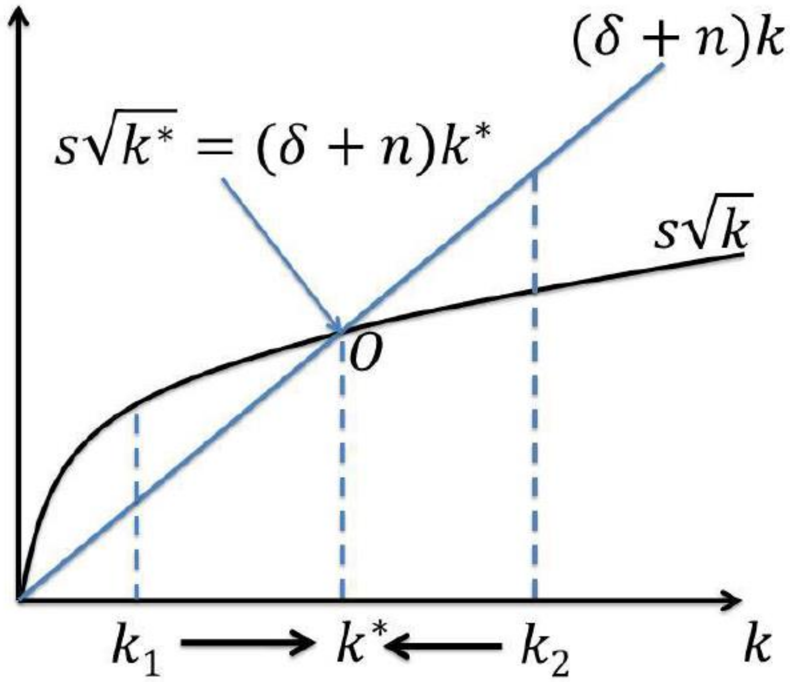
(2) $s\sqrt{k_t} < (\delta + n)k_t$のとき, 資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n)k_t < 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本$k_t$の値のときには，資本は減少します。

(3) $s\sqrt{k_t} = (\delta + n)k_t$のとき，資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n)k_t = 0$です。資本の変化分がゼロであるため資本は一定で変化しません。この水準を人口成長があるときの定常状態と呼び，以前と同様k^*で表します。

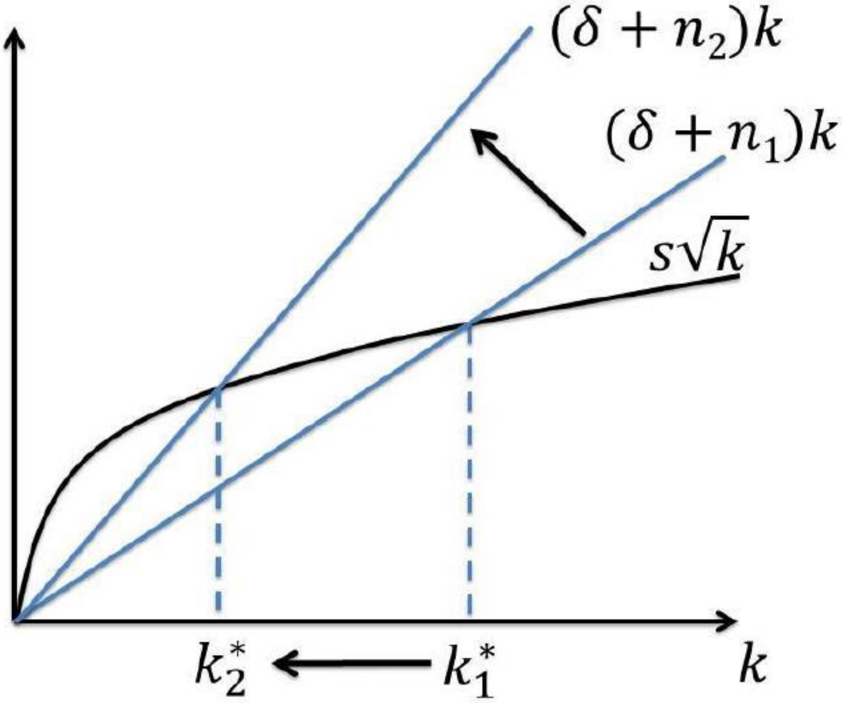
(3)のケースでは，一人当たり資本ストックの定常状態の値は，$s\sqrt{k^*} = (\delta + n)k^*$より，$k^* = \left(\frac{\delta+n}{s}\right)^2$です。

グラフを使うとk_tの動きが良く見えてきます。一人当たり資本の変化分である$\frac{dk_t}{dt}$が先ほ

どの三つのどのケースになるかは，次のグラフを見て$s\sqrt{k}$と$(\delta+n)k$の大きさ比べをすると簡単にわかります。なおグラフでは添字のtを省略しています。一人当たり資本kが交点 O よりも左側の水準であれば，(1)のケースに対応していますので，常に$\Delta k>0$，つまりkは時間とともに増加します。また，一人当たり資本kが交点 O よりも右側の水準であれば，(2)のケースに対応していますので，常に$\Delta k<0$，つまりkは時間とともに減少します。最後に交点 O がケース(3)に対応しており，この経済の定常状態を表しています。この経済の成長経路も人口成長が無いモデルと同じく，スタート地点の一人当たり資本がどの水準であっても，経済は安定的に定常状態k^*へと向かっていきます。



人口成長率が経済に与える影響を考える際には，一人当たりの所得に対しての影響を考察することが重要です。そこでもし人口成長率nが変化した場合，経済にどのような影響があるでしょうか？次のグラフを用いて，その影響を説明します。初め経済はn_1という人口成長率でk_1という定常状態にいるとしましょう。いま人口成長率がn_2へ上昇したとしましょう。人口成長率が上昇したことによって，$(\delta+n)k$のグラフが図のようにシフトします。その結果，いまの水準k_1から時間とともに新しい定常状態k_2へと移行していくことになります。新旧二つの定常状態において，所得水準はどのように違うでしょうか？一人当たり資本は$k_1>k_2$です。一人当たり生産関数$y=\sqrt{k}$より，$y_1=\sqrt{k_1}$，$y_2=\sqrt{k_2}$とすると，$y_1>y_2$です。つまり人口成長率が高いほうが，定常状態の一人当たりは低いことになります。



何故このような結果になるのでしょうか。その直感的な理由は，先ほど説明したことと同様です。人口成長率が高いと，一度に生まれる人口が多くなります。その結果として一人当たりの資本が薄まってしまうため，人口成長率nが大きいほど，定常状態の一人当たり所得は低くなります。

最後に，人口成長を考慮したソローモデルによって，このような持続的な経済成長を説明できるでしょうか？いったん定常状態に到達すると，そこからは一人当たり資本k^*は変化しません。つまり成長が止まってしまうのです。一人当たりの所得はどうでしょうか。一人当たりの生産関数$y=\sqrt{k}$からわかるとおり，定常状態k^*で一定になれば，同じく一人当たり所得も$y^*=\sqrt{k^*}$も一定になり，成長が止まってしまいます。それでは経済全体の所得の持続的な成長はどうでしょうか。つまり資本蓄積と人口成長の二つを組み合わせても，一人当たりの所得の持続的な成長は説明できないのです。

それでは，経済全体ではどのようになるでしょうか。一人当たりの所得yと人口Lを掛けあわせた$y \times L$ものが経済全体の所得です。一人当たり所得yは定常状態では一定でした。この経済の人口Lはnの率で成長していきます。所得yは定常状態では一定なので，定常状態における経済全体の所得$y \times L$は人口成長率nで持続的に成長をし続けます。

持続的な成長の説明

一人当たりの所得については，資本蓄積と人口成長ともに持続的成長の原動力ではない。
経済全体の所得は資本蓄積と人口成長によって，持続的に成長する。

一人っ子政策

経済成長あるいは食糧問題という観点から，人口政策を取る国もあります。有名な例は中国の「一人っ子政策」です。正式名称は「計画生育政策」といいます。1979 年に開始された人口増加に制限をかける政策です。この政策を同意した家族には高い賃金や住宅の優遇措置といったメリットがある一方で, 違反した場合には社会負担手数料を課すといった厳しいものになっています。中国に住む全員に適用された政策というわけではなく, 香港・マカオは対象外で, さらに漢民族とチワン族の夫婦だけに適用された人数制限となっています。この政策により, 中国の合計特殊出生率（一人の女性が一生に産む子供の平均数）は 1960 年から 1978 年の平均で 5.13 (http://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.TFRT.IN)であったのに対して，1980 年代の平均は 2.644，90 年代は 1.52 と人口抑制の効果を発揮しています。しかし，こうした政策によって問題も生じています。例えば，一人っ子政策に違反した不利益から逃れるために，第二子以降の出生の登録をせず，戸籍が無く医療や教育を受けることができない黒孩子(ヘイハイズ) と呼ばれる子供たちが現れるという事態が生じました。こうした問題もあり，2000 年以降に一人っ子政策は若干緩和されされ，2000 年代の平均は 1.642，2011 年には 1.657 と数字が少し大きくなっています。また中国共産党は 2015 年 10 月の第 18 期中央委員会第 5 回総会（5 中総会）において、すべての夫婦に 2 人までの子供を認めるとして、「一人っ子政策」の廃止を決めました。

離散時間モデルによる人口成長のあるソローモデルの定式化

今度は，離散時間モデルにおいて，人口成長のあるソローモデルを定式化してみましょう。離散時間モデルでは時間は離散的に変化します。ここでは，時間の最小単位は 1 とします。このとき，時間が最小単位の 1 変化するときのある変数x_tの変化分を$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$のように変数の差分で記述することができます。これを利用して，モデルを定式化していきます。

生産関数はテキストと同様に$Y_t = \sqrt{K_t N_t}$とし，一人当たり生産関数については，$y_t = \sqrt{k_t}$とします。次に，これまで一定としていた人口を，時間とともに成長して増加するようなモデルに変更します。人口N_tは成長率nで増加すると仮定します。人口成長率nは一定の値です。よって，$N_{t+1} - N_t = n \times N_t$と定式化できます。これを変形すると，

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = n \quad または \quad \frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + n$$

とも記述できます。例えば，人口成長率が 2%であるとすると，$n = 0.02$として，$\frac{N_{t+1}-N_t}{N_t} = 0.02$です。

資本蓄積は，貯蓄率sと固定資本減耗率δを用いて，これまでと同様に投資（＝貯蓄）マイナス固定資本減耗より，経済全体では

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$$

と表します。この式に基づいて「一人当たりの資本蓄積」がどのように定式化できるかを説明します。一人当たりの資本ストック$k_t = \frac{K_t}{N_t}$の変化を考察するため，上の式の両辺をN_tで割ります。すると，

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} - \frac{K_t}{N_t} = \frac{sY_t}{N_t} - \frac{\delta K_t}{N_t} \Rightarrow \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\frac{N_{t+1}}{N_t} - k_t = sy_t - \delta k_t$$

ここで，$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}$，および$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + n$を利用すると，

$$(1+n)k_{t+1} - k_t = sy_t - \delta k_t$$

$$\Rightarrow k_{t+1} - k_t = \frac{s}{1+n}\sqrt{k_t} - \frac{\delta + n}{1+n}k_t$$

となり，一人当たりの資本蓄積の式を得ます。連続時間のモデルに比べると，離散時間のモデルのほうが，少しだけ式が複雑になっていますが，よく似た形をしていることがわかると思います。分析はこれまでと同様です。

一人当たり資本kは以下の三通りのケースのように振る舞います。

(1) $\frac{s}{1+n}\sqrt{k_t} > \frac{\delta+n}{1+n}k_t$ のとき，資本の変化分$k_{t+1} - k_t > 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本k_tの値のときには，資本は増加します。

(2) $\frac{s}{1+n}\sqrt{k_t} < \frac{\delta+n}{1+n}k_t$ のとき，資本の変化分$k_{t+1} - k_t < 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本k_tの値のときには，資本は減少します。

(3) $\frac{s}{1+n}\sqrt{k_t} = \frac{\delta+n}{1+n}k_t$ のとき，資本の変化分$k_{t+1} - k_t = 0$です。資本の変化分がゼロであるため資本は一定で変化しません。この水準を人口成長があるときの定常状態と呼び，以前と同様k^*で表します。

(3)のケースでは，一人当たり資本ストックの定常状態の値は，$\frac{s}{1+n}\sqrt{k^*} = \frac{\delta+n}{1+n}k^*$より，$k^* = \left(\frac{\delta+n}{s}\right)^2$です。グラフによる分析は省略します。

補論 10.5 掛け算の変化率と成長会計の導出

・成長会計の導出（簡略版）

成長会計を数学的に厳密では無いですが，簡単な導出を紹介します。

初めに準備として，**掛け算の変化率は，変化率の和で表せる**ことを利用します。次の例で説明します。$z = xy$という二つの変数の掛け算からなるzを考えるとき，zの変化率$\frac{\Delta z}{z}$を求めます。掛け算の変化率は，変化率の和で表せるxの変化とyの変化を合わせたものがzの変化に相当します。xの変化分をΔx，yの変化分をΔyとするとき，$z = xy$の変化率は

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy}{xy} = \frac{xy + \Delta x \ \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y - xy}{xy}$$

$$= \frac{\Delta x \ \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y}{xy}$$

と書くことができます。ここで小さい数字同士の積である$\Delta x \Delta y$は非常に小さい数字になることから，ほぼ 0 として無視することにすると，

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{\Delta x \ \times y + x \times \Delta y}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z}{z} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

を得ることになります。つまりxとyの積であるzの変化率はxの変化率とyの変化率の和として表せます。具体的に数字の例を見てみましょう。下の表では，二行目と三行目において今年のxとyの値，および翌年のxとyの値，そしてxyの値を表示しています。四行目では，それぞれの変化率を示しています。xの変化率は 3%，yの変化率は 5% です。このときxy の変化率は 8.15% と，約 8% になっており，上記の近似が概ね良いことを確認できます。

	x	y	$x \times y$
今年	100	2.0	200.0
翌年	103	2.1	216.3
変化率	3%	5 %	8.15% ≈ 8%

さて，以上の知識を踏まえて成長会計を導出してみましょう。生産関数は少し一般的に　のままのコブ・ダグラス型生産関数を用います。

$$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

Aは全要素生産性です。(数学的な厳密性は無視して)K^{α}はKをα回掛けあわせたものですから，コブ・ダグラス型生産関数は次の掛け算と読み替えることができます。

$$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha} = \underbrace{A}_{1\text{回}} \times \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\alpha\text{回}} \times \underbrace{N \times \cdots \times N}_{1-\alpha\text{回}}$$

ここで先ほど説明した「掛け算の変化率は，変化率の和で表せる」という性質を利用すると，以下のように各項の変化率の和に書き直すことができます。

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{1\text{回}} + \underbrace{\frac{\Delta K}{K} + \cdots + \frac{\Delta K}{K}}_{\alpha\text{回}} + \underbrace{\frac{\Delta N}{N} + \cdots + \frac{\Delta N}{N}}_{1-\alpha\text{回}} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta N}{N}$$

この式は，GDP の成長率$\frac{\Delta Y}{Y}$を，全要素生産性の貢献部分$\frac{\Delta A}{A}$，資本の貢献部分$\alpha\frac{\Delta K}{K}$，労働の貢献部分$(1-\alpha)\frac{\Delta N}{N}$に要因分解したものです。これ技術の貢献部分$\frac{\Delta A}{A}$について解くと，

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \left[\alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta N}{N}\right]$$

を得ることができます。

・対数の性質を利用する

対数を知っている人は，もっと計算が簡単になります。いま対数の底をネイピア数 e とした自然対数を$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$と表記することにします。対数の計算方法をまとめると以下のようになります。証明等は数学の教科書に譲ることにし，ここでは以下の性質を利用するだけにします。

・$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

・$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

・$\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln x$

・$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

・$\frac{d\ln(x_t)}{dt} = \frac{d\ln(x_t)}{dx_t} \times \frac{dx_t}{x_t} = \frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$

最後の一つは, 時間と共に変化するx_tという変数に対数を取った$\ln(x_t)$を時間tについて微分したものです$\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$は$x_t$の変化率を意味し，先ほどの説明の$\frac{\Delta x}{x}$とほぼ同じものを意味していると考えて差し支えありません。

さて，さきほどの生産関数のどの変数も時間とともに変化する変数ですから，それぞれに添え字tをつけることとします。生産関数の両辺について対数をとると，対数の性質から次の式を得ます。

$$\ln Y_t = \ln A_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln N_t$$

ここで両辺を時間tについて微分すると，

$$\frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t}=\frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t}+\alpha\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K}+(1-\alpha)\frac{\frac{dN_t}{dt}}{N_t}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t}=\frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t}-\left[\alpha\frac{\frac{dK_t}{dt}}{K}+(1-\alpha)\frac{\frac{dN_t}{dt}}{N_t}\right]$$

を得ます。$\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$は$x_t$の変化率を意味し，先ほどの説明の$\frac{\Delta x}{x}$とほぼ同じものを意味しているとしましたので，それぞれ置き換えると，

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{\Delta Y}{Y}-\left[\alpha\frac{\Delta K}{K}+(1-\alpha)\frac{\Delta N}{N}\right]$$

と先ほど導出した成長会計の式を得ることができます。

補論 10.6 技術進歩率が一定のときのソローモデル

ここでは，技術進歩が一定率で向上していくような技術進歩率が一定のときのソローモデルを紹介します。いま技術の水準をA_tとして，$\frac{dA_t}{A_t}=g$で一定のケースを考えます。また，ここでは労働増大的技術進歩を仮定します。具体的には,

$$Y_t=F(K_t,A_tL_t)$$

のように書くことができます。コブ・ダグラス型生産関数のときには,

$$Y=K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

のように書くことができます。

以下では，連続時間モデルについて，技術進歩率が一定のときのソローモデルを解説します。離散時間モデルについては，尾山大介・安田洋祐編著「［改訂版］経済学で出る数学」日本評論社　等を参照してください。

連続時間モデル

先に連続時間モデルによる人口成長のあるソローモデルを紹介します。時間とともに変化する変数にはすべて下付きの添字tをつけることにします。テキストでは記号を簡単にするために省略していましたが，ここでは今後よりレベルの高い内容に進むことを想定して，正確に説明することとします。

簡単化のため，生産関数はテキストと同様にコブ・ダグラス生産関数で$\alpha=1/2$のときの$Y_t=\sqrt{K_t(A_tN_t)}$とします。A_tN_tは効率単位で図った労働のことであり，以下では効率労働と呼ぶことにします。効率労働で割ることにより，$y_t=\frac{Y_t}{A_tN_t}$，$k_t=\frac{K_t}{A_tN_t}$はそれぞれ，効率労働

当たりの生産量と効率労働当たりの資本と呼びます。効率労働当たりの生産関数については，

$$Y_t = \sqrt{K_t(A_t N_t)} \Rightarrow \frac{Y_t}{A_t N_t} = \frac{\sqrt{K_t(A_t N_t)}}{A_t N_t} \Rightarrow \frac{Y_t}{A_t N_t} = \sqrt{\frac{K_t}{A_t N_t}} \Rightarrow y_t = \sqrt{k_t}$$

と記述することができます。人口N_tは成長率nで増加すると仮定します。人口成長率nは一定とし，

$$\frac{dN_t}{dt} = nN_t$$

とします。

資本蓄積は，貯蓄率sと固定資本減耗率δを用いて，これまでと同様に投資（＝貯蓄）マイナス固定資本減耗より，経済全体では

$$\Delta K_t = sY_t - \delta K_t$$

になります。連続時間モデルの場合は，これをより正確に，

$$\frac{dK_t}{dt} = sY_t - \delta K_t$$

と表します。

それでは，この式に基づいて「効率労働当たりの資本蓄積」がどのように定式化できるかを説明します。効率労働当たりの資本ストック$k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$を利用すると，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - (n+g)$$

と記載することができます[2]。

[2] 商に関する微分の公式より，

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{d\left(\frac{K_t}{A_t N_t}\right)}{dt} = \frac{\frac{dK_t}{dt}A_t N_t - K_t\frac{dA_t N_t}{dt}}{(A_t N_t)^2}$$

両辺をk_tでわると，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t} = \frac{\frac{\frac{dK_t}{dt}A_t N_t - K_t\frac{dA_t N_t}{dt}}{(A_t N_t)^2}}{\frac{K_t}{A_t N_t}} = \frac{\frac{\frac{dK_t}{dt}A_t N_t - K_t\frac{dA_t N_t}{dt}}{A_t N_t}}{K_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt} - \frac{K_t\left(\frac{dA_t N_t}{dt}\right)}{A_t N_t}}{K_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - \frac{\left(\frac{dA_t N_t}{dt}\right)}{A_t N_t}$$

$$= \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - \frac{\frac{dN_t}{dt} + \frac{dA_t}{dt}}{A_t N_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - \frac{\frac{dN_t}{dt}}{N_t} - \frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - (n+g)$$

を得ます。

別の方法として，対数の性質を利用して，lnを自然対数とするとき，$k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$より$lnk_t = lnK_t - lnN_t - lnA_t$を得ます。両辺を時間$t$について微分すると，対数に関する微分の公式より，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - \frac{\left(\frac{dN_t}{dt}\right)}{N_t} - \frac{\left(\frac{dA_t}{dt}\right)}{A_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} - (n+g)$$

ここで，$\frac{dK_t}{dt} = sY_t - \delta K_t$と$Y_t = \sqrt{K_t A_t N_t}$より，

$$\frac{\left(\frac{dk_t}{dt}\right)}{k_t} = \frac{s\sqrt{K_t A_t N_t} - \delta K_t}{K_t} - (n+g) = s\sqrt{\frac{A_t N_t}{K_t}} - (\delta + n + g) = s\sqrt{\frac{1}{k_t}} - (\delta + n + g)$$

ここで両辺にk_tをかけて，整理すると，人口成長率nかつ労働増大的技術進歩率gであるときのソローモデルにおける効率労働当たりの資本蓄積の式である

$$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n + g)k_t$$

を得ます。

第 10 章のソロ−モデルとの違いは，nとgがあるか無いかだけです。もし$n = 0$かつ$g = 0$のときは，テキストの$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - \delta k_t$と同じ式になります。

効率労働当たりの資本蓄積に関する振る舞いの分析は，これまでとほとんど同じです。効率労働当たり資本kは以下の三通りのケースのように振る舞います。

(1) $s\sqrt{k_t} > (\delta + n + g)k_t$のとき，資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n + g)k_t > 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本$k_t$の値のときには，資本は増加します。

(2) $s\sqrt{k_t} < (\delta + n)k_t$のとき，資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n + g)k_t < 0$です。つまりこの不等式を満たすような資本$k_t$の値のときには，資本は減少します。

(3) $s\sqrt{k_t} = (\delta + n)k_t$のとき，資本の変化分$\frac{dk_t}{dt} = s\sqrt{k_t} - (\delta + n + g)k_t = 0$です。資本の変化分がゼロであるため資本は一定で変化しません。この水準を人口成長があるときの定常状態と呼び，以前と同様k^*で表します。

(3)のケースでは，効率労働当たり資本ストックの定常状態の値は，$s\sqrt{k^*} = (\delta + n + g)k^*$より，$k^* = \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^2$です。

定常状態における成長率

労働増大的技術進歩率が一定であるようなソローモデルでは，定常状態における成長率は第 10 章で紹介したものとは少し異なります。定常状態における効率労働当たりの生産量は，

$$y^* = \sqrt{k^*}$$

であり，効率労働当たりの資本k^*が一定であることから，同様に一定です。ここで，

を得ます。

効率労働当たりになっている単位を一人あたりになおします。$y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t}$より，一人当たりの生産量$\frac{Y_t}{N_t} = y_t \times A_t$と表すことができます。ここで，両辺の変化率を求めると，

$$一人当たり生産量の成長率 = \frac{\left(\frac{dy_t}{dt}\right)}{y_t} + \frac{\left(\frac{dA_t}{dt}\right)}{A_t}$$

という関係があります。ここで，定常状態では$y_t = y^*$で一定であることから，その変化率はゼロであり，つまり$\frac{\left(\frac{dy_t}{dt}\right)}{y_t} = 0$であることを利用すると，

$$定常状態における一人当たり生産量の成長率 = g$$

となります。これにより，労働増大的技術進歩率が正の値であれば，つまり技術が向上し続ければ，定常状態に到達したとしても一人あたりの生産量は成長し続けることがわかります。