第 6 章　ウェブ補論

目次

補論 6.1 マンデル・フレミングモデルの詳細

第 6 章の最後に取り扱った、IS-LM モデルを、開放経済に拡張したモデル（マンデル・フレミングモデル）を紹介します。このモデルは、日本（自国）とそれ以外の国から構成されています。簡単化のため，これまでと同様に日本（自国）とアメリカ（外国）とします。アメリカの金利を r^u として，一定と仮定します。日本の金利 r^j は，以下では単に r とします。ここでは，簡単化のため期待為替レート$\hat{e}$は均衡為替レートe^*と同じと仮定し，為替の変化が期待されない経済を考えます。その結果として，金利平価式は国内金利とアメリカの金利が等しい $r=r^u$ と簡単に記述することができます。

財市場の均衡を表す IS 曲線は、以下のように与えられます。

$$Y = C(Y) + I(r) + G + NX(e)$$

ここで、純輸出NX(e)は自国通貨建て為替レートeに依存しています。すでに学んだように、円安になると輸出が増え、輸入が減るので純輸出は増えるため，純輸出 NX は為替レート e の増加関数です。貨幣市場の均衡を表す LM 曲線は以前と変わらず次のようになります。

$$M = L(Y, r)$$

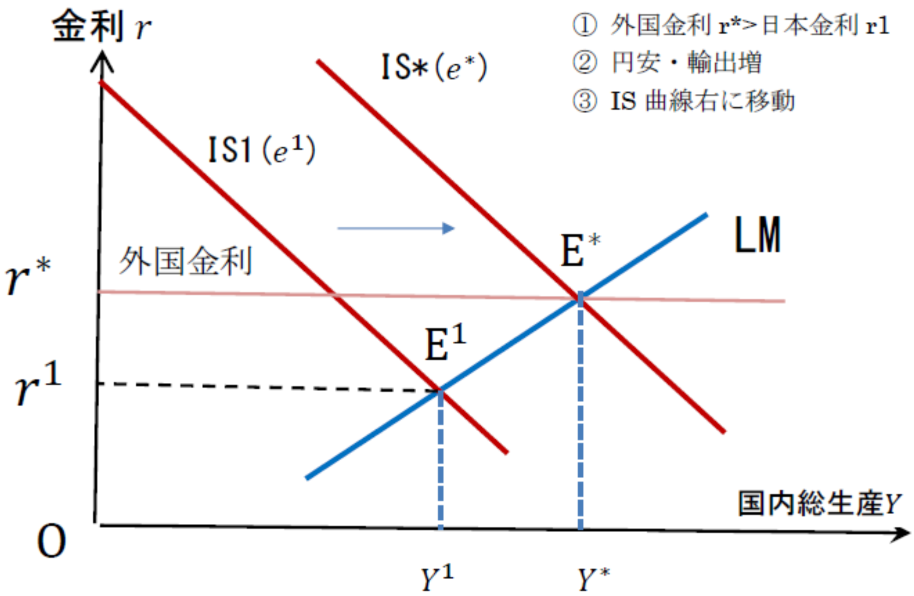
物価水準は一定で，簡単化のため P=1 とします。

図 9.13 に，財市場の均衡を表す IS 曲線と貨幣市場の均衡を表す LM 曲線を描いています。閉鎖経済の IS-LM モデルと同様に，縦軸を r，横軸を Y とするとき，IS 曲線は右下がり，LM 曲線は右上がりに描くことができます。マンデル・フレミングモデルの場合には，純輸出が為替レートに影響されるため，IS 曲線の位置が為替レートによって異なるという特徴があります。

財市場・貨幣市場・外国為替市場の三つの市場が同時に均衡するのは，図 1 の E*になります。その理由を説明します。今，為替レートがある値 e_1 の時の IS 曲線と LM 曲線の位置が下の図の IS_1，そして LM として与えられたとします。このとき、国内の財市場と貨幣市場がともに均衡するのは IS 曲線と LM 曲線の交点である図の点 E_1 です。このとき，国内金利 r_1 は，図のように米国の金利 r*よりも低くなっています。為替レートの決定で学んだように、金利の高い国で資金を運用したほうが得であるため、外国為替市場でドルを買って円を売る動きが進みこれまでより円安になり e が上昇します。e が上昇すると、純輸出が増えます。その結果、総需要の増加とともに IS 曲線は右に移動します。右方向に移動することで、国内の金利 r が上昇します。国内金利がアメリカの金利を下回る限り、外国為替市場での円売りは続き，円安および純輸出の増加が進み，

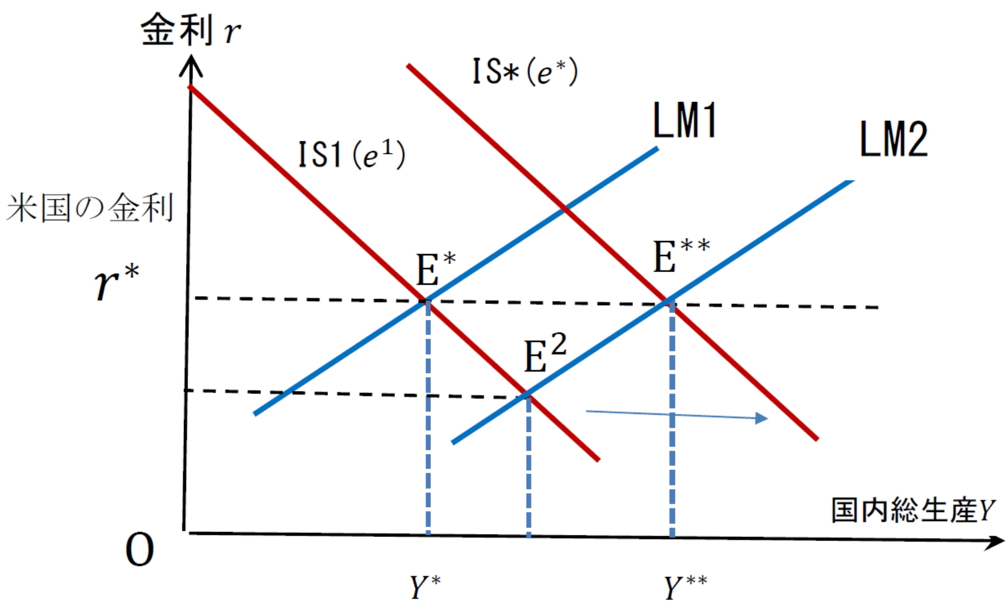
IS 曲線は右にシフトし続けます。最終的に，国内の均衡金利がアメリカの金利と等しくなると，日本とアメリカどちらで運用しても違いがなくなるため，ドル買い円売りが終了し，為替レートも動かなくなります。その状況における IS 曲線が図の IS*であらわされており，最終的な均衡は点 E*となります。

図 1 マンデル･フレミングモデル



このモデルにおける金融緩和政策を考えましょう。今、次の図 2 のように LM 曲線が LM1 で与えられており、均衡が点 E*として与えられているとします。この均衡において、金利は米国の金利と等しくなっており、為替レートに変動はありません。ここで、中央銀行が貨幣供給量を増やしたとします。第 6 章で学んだように、LM 曲線は右に下がり、IS 曲線との交点は E*から E2 に移ります。もし閉鎖経済であれば、均衡は E2 として決まります。しかし E2 では金利が米国の金利に比べて低くなっているため，先程と同様に通貨安となり、純輸出が増え、IS 曲線が右に移動し始めます。この移動は、金利が米国の金利と一致するまで続きます。従って、最終的な均衡は E**となります。閉鎖経済の状況と比べ、金融緩和政策の効果は大きいといえます。

図 2 マンデル･フレミングモデルでの金融緩和政策の効果



補論 6.2 効用最大化問題について

本においては、ライフサイクル仮説を説明する際、消費者は消費の水準が時間によらず一定になるように行動すると仮定してきました。しかし、ライフサイクル仮説に基づく消費の決定方法については、各期の消費から家計が得る「効用」を最大にするように消費を決めるとする考え方もあります。この補論では効用最大化に基づく消費の決定方法について説明します。

本においても説明しましたが、ライフサイクル仮説において、家計は金利及び各期の所得を所与として、生涯の予算制約式を満たす消費の組み合わせ(c_1, c_2)を選びます。以下では，家計が消費の組み合わせ（配分）(c_1, c_2)から効用（utility）と呼ばれる幸福を得ており，その程度が消費(c_1, c_2)に依存した効用関数 U により表されると仮定します。そして，家計は予算制約式(4) のもとで消費を上手に選び，U を最大にするとします。ここで，効用関数 U が最大化された状況を式で表してみましょう。以下では第 t 期の消費c_t が 1 単位増加したときの効用 U の増加量を，第 t 期の消費に関する限界効用（marginal utility）といいMU_t と表します。第 1 期の消費c_1がx_1単位増え，かつ第 2 期の消費c_2がx_2 単位増えた際の効用の総増加量は限界効用を用いて$x_1 \times MU_1 + x_2 \times MU_2$ と表せます。

いま，(4) 式のもとでc_1 を 1 単位減らすとc_2を 1＋r 単位だけ増やせます。この消費の変化による効用増加量ΔU は$\Delta U = -MU_1 + (1+r) \times MU_2$となります。反対に，$c_1$ を 1 単位増やし ，c_2

を1＋r 単位減らす ことも予算上でき，この場合の効用増化量は$-\Delta U$になります。もしある消費の配分(c_1^*, c_2^*)が⑷ 式のもとで効用 U を最大にしているなら，この配分を⑷ 式のもとどう変えても U の値は変わらないか減るかのどちらかです。よって$\Delta U \leq 0$ かつ$-\Delta U \leq 0$ が同時に成立します。つまり$\Delta U = 0$ となり，以下の式が成立します。

$$\underbrace{MU_1}_{\text{限界効用(1期)}} = \underbrace{(1+r)}_{1+\text{金利}} \times \underbrace{MU_2}_{\text{限界効用(2期)}} \quad (5)$$

家計の効用最大化条件を示すこの式はオイラー方程式と呼ばれます。たとえば，効用関数が各期の消費量の積$U = c_1 \times c_2$である場合，各期の限界効用は$MU_1 = (c_1+1)c_2 - c_1c_2 = c_2$，$MU_2 = c_1(c_2+1) - c_1c_2 = c_1$ となるので，オイラー方程式⑸ は$c_2 = (1+r)c_1$ と書けます。この式と予算制約式⑷ を連立させることで，第 1 期の消費を所得の関数として$c_1 = \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right)$と求めることができます。第 1 期を現在とすると，現在の消費c_1は，その時の所得y_1だけでなく，生涯の所得の割引現在価値$y_1 + \frac{y_2}{1+r}$に依存して決まります。

本において、限界効用とは、消費を1単位増やしたときに効用が増える量と説明しました。しかしより厳密には、限界効用とは消費に関する効用関数の導関数として定義されます。例えば、効用関数$U(c_1, c_2)$が今期の消費c_1と来期の消費c_2の双方に依存している場合、今期の消費に関する限界効用MU_1とは、来期の消費量c_2を固定し、今期の消費c_1について効用関数を微分したものとして得られます。

$$MU_1 = \lim_{h \to 0} \frac{U(c_1+h, c_2) - U(c_1, c_2)}{h} \quad (1)$$

つまり、限界効用とは、消費量をごくわずかな量hだけ増やしたときに効用がその何倍増えるかを示したものといえます。本においては今期の消費を増やす量hを1単位つまり$h = 1$とおいていましたが、正確にはhを小さくとらなくてはいけません。本においては、効用関数$U(c_1, c_2) = c_1c_2$が消費c_1について比例的であったため、hの取り方を$h = 1$としても限界効用を計算できましたが、より一般的な効用関数では効用関数を微分することで求める必要があります。

同様に、来期の消費に関する限界効用MU_2とは、今期の消費量を固定し、来期の消費について効用関数を微分したものとして得られます。

$$MU_2 = \lim_{h \to 0} \frac{U(c_1, c_2+h) - U(c_1, c_2)}{h} \quad (2)$$

本において説明したように、消費者が効用関数を予算制約式

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

を満たす範囲で最大にしているとき、消費の組み合わせ(c_1, c_2)は以下のオイラー方程式を満たさなくてはなりません。

$$MU_1 = (1+r)MU_2$$

例えば、

$$(1+r)MU_2 > MU_1$$

を満たす、予算制約式上の消費の組み合わせ(c_1, c_2)を選んだとします。この場合、今期の消費を少しだけ(h)減らし、その分来期の消費を$(1+r)h$増やすことにより効用を増やすことができるからです。なぜなら、今期の消費を少しだけ(h)減らすと、限界効用の定義をしめす(1)式より効用は$MU_1 \times h$だけ減ります。一方このことにより

来期の消費を$(1+r)h$増やせるので、限界効用の式(2)より効用は$MU_2 \times (1+r) \times h$だけ減ります。仮定より、トータルで見た効用の変化はプラスになります。

$$-MU_1 \times h + MU_2 \times (1+r) \times h = \big((1+r)MU_2 - MU_1\big) > 0$$

このことは、$(1+r)MU_2 > MU_1$を満たすような消費の組み合わせ(c_1, c_2)は効用$U(c_1, c_2)$を最大にしていないことを示しています。同様に$(1+r)MU_2 < MU_1$を満たすような消費の組み合わせ(c_1, c_2)も効用$U(c_1, c_2)$を最大にしていません。よって、消費の組み合わせ(c_1, c_2)が効用$U(c_1, c_2)$を最大にしているとき、オイラー方程式が成立します。

例題:効用関数を

$$U(c_1, c_2) = -(c_1)^2 + 80c_1 - (c_2)^2 + 80c_2$$

とする。一方、金利を 0.2 とし、予算制約式が

$$c_1 + \frac{c_2}{1.2} = 53$$

で与えられているとする。予算制約式の元効用を最大にする消費の組み合わせ(c_1, c_2)を求めなさい。

答　関数$ax^2 + bx + c$を微分すると$2ax + b$になる。よって限界効用はそれぞれ

$$MU_1 = 80 - 2c_1$$

$$MU_2 = 80 - 2c_2$$

とおける。従って、オイラー方程式は

$$80 - 2c_1 = 1.2(80 - 2c_2) \rightarrow c_1 - 1.2c_2 + 8 = 0$$

とかける。これと予算制約式を連立させることにより$(c_1, c_2) = (28,30)$を得る。これが予算制約式のもとで効用を最大にする消費の組み合わせである。