4 章の補論

<u>混合戦略とは</u>

本文ではプレイヤーが選択肢の中から 1 つの戦略を確定的に選ぶ純粋戦略ゲームを考えましたが、それとは別に確率的に戦略を選ぶゲームのことを混合戦略ゲームといいます。純粋戦略ゲームは、特定の戦略を 100%の確率で選んでいるゲームと考えれば混合戦略ゲームの一種とみなすこともできます。純粋戦略の範囲ではナッシュ均衡が存在しない場合であっても、混合戦略まで考えればナッシュ均衡が存在するゲームもあります。そのような例として以下の戦略形ゲームを考えてみましょう。

表 A4.1　路上駐車と取り締まりゲーム

		警察	
		取り締まる	取り締まらない
運転手	路駐する	(-10,10)	(5,-10)
	路駐しない	(-5,-5)	(-5,0)

ナッシュ均衡なし

この表は道路の駐車禁止エリアに路駐しようとしている運転手と、路駐を取り締まる警察をプレイヤーにしたゲームの利得を表しています。運転手は、警察が｛取り締まらない｝ときに｛路駐する｝を選べば正の利得 5 を得られますが、逆に警察が｛取り締まる｝ときに｛路駐する｝を選んでしまうと罰金を科されるため負の利得-10 となります。また、運転手は｛路駐しない｝を選べば、警察が｛取り締まる｝か｛取り締まらない｝に関わらず、多少の不便を被るので利得は-5 です。一方、警察は、運転手が｛路駐する｝ときに｛取り締まる｝を選べば罰金を徴収できるので利得は 10 となりますが、運転手が｛路駐しない｝ときに｛取り締まる｝を選んでも無駄な労力となり利得は-5 です。また警察は、運転手が｛路駐しない｝場合に｛取り締まらない｝を選ぶと罰金徴収はできないものの無駄な労力はしなくて済むので利得は 0 となりますが、運転手が｛路駐する｝場合に｛取り締まらない｝と、職務怠慢と見なされてしまい利得は-10 になります。

表 A4.1 には前節の方法に従って意思決定の矢印を入れてあります。この矢印に従うとプレイヤーの意思決定は安定した状態にはたどり着かないことがわかります。警察が｛取り締まる｝なら運転手は｛路駐しない｝⇒運転手が｛路駐しない｝なら警察は｛取り締まらない｝⇒警察が｛取り締まらない｝なら運転手は｛路駐する｝⇒運転手が｛路駐する｝なら警察は｛取り締まる｝⇒・・・というようにループしてしまい安定した状態がありません。したがって、プレイヤーが単一の戦略をとる純粋戦略ゲームの枠組みではこのゲームにナッシュ均衡は存在しないことになります。

それではプレイヤーが確率的に戦略を選ぶことができる混合戦略ゲームではどうでしょ

うか？ここで“確率的に戦略を選ぶ”とは、たとえば、運転手は確率 30%で｛路駐する｝を選び、確率 70%で｛路駐しない｝を選ぶようなことを意味します。これは 10 日間のうちランダムに 3 日間は｛路駐する｝が、残りの 7 日間は｛路駐しない｝というように考えると分かりやすいかもしれません。

ここでは、各プレイヤーが利得の期待値(期待利得)が最大となるように各戦略をとる確率を決めるものとして混合戦略ゲームのナッシュ均衡を考えてみましょう。期待利得とは、確率的に戦略を選んだ場合に“平均的に得られる利得”のことを表しています。数式で表すと利得gの期待値$E[g]$は以下で表されます。

（期待利得）
$$E[g]=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot g_i \tag{4-1}$$

これは起こり得るすべての事象$(i=1,\dots,n)$に対して、それが起こる確率p_iとそのときの利得g_iを掛けてから、足しあわせることを意味しています。

表 A4.1 では運転手が｛路駐する｝確率をpとすると、｛路駐しない｝確率は$1-p$となります。同様に警察が｛取り締まる｝確率をsとすると｛取り締まらない｝確率は$1-s$になります。ここで、$0\le p\le 1$、$0\le s\le 1$です。このとき、運転手と警察がそれぞれ独立に意思決定すると表 A4.1 の左上のマス（路駐する、取り締まる）が選ばれる確率はpsになります。同様にして、(路駐する、取り締まらない)、(路駐しない、取り締まる)、(路駐しない、取り締まらない）の各マスが選ばれる確率はそれぞれ$p(1-s)$、$(1-p)s$、$(1-p)(1-s)$になります。したがって、運転手の期待利得は 4 つのマスのそれぞれが選ばれる確率にそのときの利得をかけて足し合わせればよいので、以下となります。

$$\begin{aligned}E[g_1]&=ps(-10)+p(1-s)(5)+(1-p)s(-5)\\&\quad+(1-p)(1-s)(-5)\\&=-15ps+10p-5=-5p(3s-2)-5\end{aligned} \tag{4-2}$$

運転手はこの期待利得を最大化するように路駐確率pを決定すればよいことになります。ここで$0\le p\le 1$なので、式(4-2)の第 1 項は警察の取り締まる確率sが$2/3$よりも大きければ負の値になります。このとき、式(4-2)が最大となるのは$p=0$のときです。逆にsが$2/3$よりも小さければ式(4-2)の第 1 項は正の値なので、$p=1$のときに最大となります。また$s=2/3$の場合はpがどのような値であっても式(4-2)は-5 になります。以上をまとめると運転手にとっての最適反応は以下になります。

$$p = \begin{cases} 1 & (s < 2/3) \\ 0 & (s > 2/3) \\ \text{不定} & (s = 2/3) \end{cases} \tag{4-3}$$

これは、運転手は警察の取り締まる確率が$2/3$よりも大きければ路駐はまったくせず、$2/3$よりも小さければ必ず路駐することを意味しています。また警察の取り締まる確率が$2/3$であれば、運転手の路駐する確率は0から1の間のどんな値でもよいことになります。同様にして、警察の期待利得を以下のように求めることができます。

$$\begin{aligned} E[g_2] &= ps(10) + p(1-s)(-10) + (1-p)s(-5) \\ &\quad + (1-p)(1-s)(0) \\ &= 25ps - 10p - 5s = 5s(5p-1) - 10p \end{aligned} \tag{4-4}$$

また、この期待利得を最大にするsは以下になります。

$$s = \begin{cases} 1 & (p > 1/5) \\ 0 & (p < 1/5) \\ \text{不定} & (p = 1/5) \end{cases} \tag{4-5}$$

これより、警察は運転手の路駐する確率が 1/5よりも大きければ必ず取り締まり、1/5よりも小さければまったく取り締まらないのが最適になります。また運転手の路駐する確率が丁度 1/5のときは警察の取り締まる確率は0から1の間のどんな値でもよいことになります。

以上より相手の戦略を所与としたときの運転手と警察の最適反応の関係を図示したのが図 A4.1 です。このゲームの均衡は、両者の最適反応の交点である$(p, s) = (1/5, 2/3)$です。ちまり、運転手は確率 1/5で路駐し、警察は確率$2/3$で取り締まるのが均衡戦略になります。

図 A4.1　混合戦略におけるナッシュ均衡（路上駐車と取り締まりゲーム）