ウェブ補論　6 章　限界効用について（p.170）

本において、限界効用とは、消費を 1 単位増やしたときに効用が増える量と説明しました。しかしより厳密には、限界効用とは消費に関する効用関数の導関数として定義されます。例えば、効用関数$U(c_1, c_2)$が今期の消費c_1と来期の消費c_2の双方に依存している場合、今期の消費に関する限界効用MU_1とは、来期の消費量c_2を固定し、今期の消費c_1について効用関数を微分したものとして得られます。

$$MU_1 = \lim_{h \to 0} \frac{U(c_1 + h, c_2) - U(c_1, c_2)}{h} \qquad (1)$$

つまり、限界効用とは、消費量をごくわずかな量hだけ増やしたときに効用がその何倍増えるかを示したものといえます。本においては今期の消費を増やす量hを 1 単位つまり$h = 1$とおいていましたが、正確にはhを小さくとらなくてはいけません。本においては、効用関数$U(c_1, c_2) = c_1 c_2$が消費c_1について比例的であったため、hの取り方を$h = 1$としても限界効用を計算できましたが、より一般的な効用関数では効用関数を微分することで求める必要があります。

同様に、来期の消費に関する限界効用MU_2とは、今期の消費量を固定し、来期の消費について効用関数を微分したものとして得られます。

$$MU_2 = \lim_{h \to 0} \frac{U(c_1, c_2 + h) - U(c_1, c_2)}{h} \qquad (2)$$

本において説明したように、消費者が効用関数を予算制約式

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = y_1 + \frac{y_2}{1 + r}$$

を満たす範囲で最大にしているとき、消費の組み合わせは(c_1, c_2)は以下のオイラー方程式を満たさなくてはなりません。

$$MU_1 = (1 + r)MU_2$$

例えば、

$$(1 + r)MU_2 > MU_1$$

を満たす、予算制約式上の消費の組み合わせ(c_1, c_2)を選んだとします。この場合、今期の消費を少しだけ(h)減らし、その分来期の消費を$(1 + r)h$増やすことにより効用を増やすことができるからです。なぜなら、今期の消費を少しだけ(h)減らすと、限界効用の定義をしめす(1)式より効用は$MU_1 \times h$だけ減ります。一方この

ことにより

来期の消費を$(1+r)h$増やせるので、限界効用の式(2)より効用は$MU_2 \times (1+r) \times h$だけ減ります。仮定より、トータルで見た効用の変化はプラスになります。

$$-MU_1 \times h + MU_2 \times (1+r) \times h = \big((1+r)MU_2 - MU_1\big) > 0$$

このことは、$(1+r)MU_2 > MU_1$を満たすような消費の組み合わせ(c_1, c_2)は効用$U(c_1, c_2)$を最大にしていないことを示しています。同様に$(1+r)MU_2 < MU_1$を満たすような消費の組み合わせ(c_1, c_2)も効用$U(c_1, c_2)$を最大にしていません。よって、消費の組み合わせ(c_1, c_2)が効用$U(c_1, c_2)$を最大にしているとき、オイラー方程式が成立します。

<u>例題：</u>効用関数を

$$U(c_1, c_2) = -(c_1)^2 + 80c_1 - (c_2)^2 + 80c_2$$

とする。一方、金利を 0.2 とし、予算制約式が

$$c_1 + \frac{c_2}{1.2} = 53$$

で与えられているとする。予算制約式の元効用を最大にする消費の組み合わせ(c_1, c_2)を求めなさい。

答　関数$ax^2 + bx + c$を微分すると$2ax + b$になる。よって限界効用はそれぞれ

$$MU_1 = 80 - 2c_1$$

$$MU_2 = 80 - 2c_2$$

とおける。従って、オイラー方程式は

$$80 - 2c_1 = 1.2(80 - 2c_2) \rightarrow c_1 - 1.2c_2 + 8 = 0$$

とかける。これと予算制約式を連立させることにより$(c_1, c_2) = (28{,}30)$を得る。これが予算制約式のもとで効用を最大にする消費の組み合わせである。