『情報とインセンティブの経済学』web 補論：第 4 章

補論 4–1　最適相対評価契約の導出

エージェントが二人のケースを考えよう．それぞれのエージェントを $i = 1, 2$ で表し，売り上げが

$$x_i = e_i + \eta + \varepsilon_i$$

で与えられるとする．ここで，x_i は店長 i の売り上げ，e_i が店長 i の選択した努力水準，そして ε_i が店長 i 固有の不確実性である．η と ε_i および ε_1 と ε_2 は独立と仮定する．本文中と同様に，η と ε_i はそれぞれの期待値がゼロとする．以下では，共通のショックである需要の状態の相対的な重要度を $\theta \in (0, 1)$ というパラメータで測り，分散が

$$E[\eta^2] = \theta\sigma^2,\ E[\varepsilon_i^2] = (1-\theta)\sigma^2,\ i = 1, 2,$$

によって与えられるとする．θ が高い状況は，共通ショックがより重要な状況であると解釈できる．

各エージェントは努力水準を同時に決定し，その後でそれぞれの売り上げ x_i が実現するとしよう．以下では，店長 i に対する報酬を w_i と表し，

$$w_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_{-i}$$

という対称な**相対評価線形契約**に限定して議論を行う．ここで $-i \neq i$ は「i 以外」を表す．

二人のエージェントは全く対称なので，以下では一般性を失うことなくエージェント 1 の問題に焦点をあて，エージェント 2 を「ライバル」と呼ぶ．エージェントが複数存在するので，ここでの問題は相当に複雑になるようにも見えるが，それぞれの努力は完全に代替的なので問題の本質は全く同じだ．エージェント 1 の期待効用の確実同値額は

$$CE = \alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 - \frac{r}{2}\big((\beta+\gamma)^2\theta + (\beta^2+\gamma^2)(1-\theta)\big)\sigma^2 - d(e_1)$$

によって与えられる．ライバルの努力量 e_2 を所与とすると，解くべき問題は基本的には変わらない．最適な努力水準はこれまでと同様に β/d だ．エージェントは対称なので，プリンシパルはそれぞれのエージェントからの期待効用を最大化する問題としてまとめることができる．

$$\max_{\alpha,\beta,\gamma} e_1 - (\alpha + \beta e_1 + \gamma e_2)$$

subject to

$$\alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 - \frac{r}{2}\big((\beta+\gamma)^2\theta + (\beta^2+\gamma^2)(1-\theta)\big)\sigma^2 - \frac{de_1^2}{2} \geq 0,$$
$$e_1 = e_2 = \frac{\beta}{d}.$$

目的関数に制約条件を代入し最大化することで

$$\frac{1-\beta}{d} - r\big((\beta+\gamma)\theta + \beta(1-\theta)\big)\sigma^2 = 0,$$

$$(\beta+\gamma)\theta + \gamma(1-\theta) = 0.$$

という 2 つの一階条件を導くことができる．2 つ目の条件より β と γ は必ず逆の符号を持つことがわかるであろう．これを解くことで，最適解を θ の関数として得ることができる．

1. $\beta^{**}(\theta) = 1/\big(1 + rd\sigma^2(1-\theta^2)\big)$.
2. $\gamma^{**}(\theta) = -\beta^{**}\theta$ が成立し，報酬はライバルの売り上げに対して減少.
3. $e^{**}(\theta) = 1/d\big(1 + rd\sigma^2(1-\theta^2)\big)$ の努力水準が実行される．
4. $\alpha^{**}(\theta)$ は参加制約より決定.
5. プリンシパルの期待効用は $\Pi^{**}(\theta) = 1/2d\big(1 + rd\sigma^2(1-\theta^2)\big)$ となり，θ に関して増加.

共通のショックがない場合 $(\theta = 0)$ は，当然ながら最適契約はエージェントが一人のケースと一致する．一方で，共通のショックの影響が強まると，報酬は自らの売り上げに対して正に，ライバルの売り上げに対して負により強く依存することとなる．もし，プリンシパルが相対評価を用いなければ，最適契約はエージェントが一人のケースと同じなので，θ の値に関わらずプリンシパルの期待効用は $\Pi^{**}(0) = 1/2d(1 + rd\sigma^2)$ だ．よって相対評価を導入することで追加的に得られる効用は $\Pi^{**}(\theta) - \Pi^{**}(0)$ として与えられる．Π^{**} は θ に関して単調増加なので，少しでも共通のショックがある場合 $(\theta > 0)$ は，プリンシパルは相対評価を用いることで期待利得を改善させることができる．また，このことから，相対評価を導入することの価値は，共通のショックがより重要な局面でより大きくなるということもわかる．

ここで，エージェントの報酬がライバルの売り上げに対して負の影響を与えるのは，**ライバルの高いパフォーマンスが需要の状態が「悪くない」ことのシグナルとなっている**からだ．エージェントの報酬が個人の売り上げにのみ依存していれば，彼らへの報酬が景気の変動や天候といった要因に著しく影響を受けることは避けられない．しかし，エージェント間で売り上げに大きな乖離がある場合は，共通ショックの影響だけでない要因が何かある可能性が高いといえよう．こうした場合に報酬に大きな格差をつけたとしても，エージェントは共通ショックの影響を受けることはないため，より効率的なリスクシェアリングの下でインセンティブを与えることができる．

補論 4–2　トーナメント：努力が連続の場合

相対評価と同じモデルを考察する．それぞれのエージェントを $i = 1, 2$ で表し，売り上げが

$$x_i = e_i + \eta + \varepsilon_i$$

で与えられるとする．ここで，x_i は店長 i の売り上げ，e_i が店長 i の選択した努力水準，そして ε_i が店長 i 固有の不確実性とする．η と ε_i および ε_1 と ε_2 は独立と仮定する．また，η と ε_i はそれぞ

れ期待値がゼロで分散が

$$E[\eta^2]=\theta\sigma^2,\ E[\varepsilon_i^2]=(1-\theta)\sigma^2,\ i=1,2,$$

によって与えられるとする．さらに以下では，ε_i は正規分布に従うと仮定する．

エージェント 1 がエージェント 2 より高い売り上げをあげる確率は

$$P[x_1>x_2]=P[e_1+\varepsilon_1>e_2+\varepsilon_2]=G(e_1-e_2)$$

と書くことができる．ここで G は $\varepsilon_2-\varepsilon_1$ の確率分布関数とし，対応する確率密度関数を g で表す．正規分布の仮定より，G もまた期待値ゼロ，分散 $2(1-\theta)\sigma^2$ の正規分布に従う．また，一階条件の大域的最適性を保証するため，θ は十分に小さいと仮定する．

これによってエージェント 1 の目的関数は

$$u(W)G(e_1-e_2)+u(L)\big(1-G(e_1-e_2)\big)-d(e_1)$$

と書くことができる．これより一階条件を求めると

$$\big(u(W)-u(L)\big)g(e_1-e_2)=de_1$$

が得られる．この場合は，エージェントが対称のため対称ナッシュ均衡が存在して，均衡における努力水準が

$$e_1=e_2=\frac{\big(u(W)-u(L)\big)g(0)}{d}=\frac{u(W)-u(L)}{2d\sigma\sqrt{(1-\theta)\pi}}$$

として得られる．当然ながらエージェントの努力インセンティブは報酬格差 $u(W)-u(L)$ とともに拡大する．

これより，$W>L$ を満たす任意の契約 (W,L) について，努力水準は θ に対して単調に増加することがわかる．逆にいうと，共通ショックの相対的な重要性が大きくなれば，任意の努力水準を引き出すために必要な報酬格差をより小さくすることが可能となり，より効率的なリスクシェアリングが実現できるということを意味している．つまりトーナメントにも相対評価による共通のショックを排除するという望ましい性質が見られるのである．