『情報とインセンティブの経済学』web 補論：第 3 章

補論 3–1　確実同値額とリスク・プレミアム

確率変数 x を考える（本文では収益）．そして，期待値は $E[x]$，分散は σ^2 であるとしよう．すると，効用関数 $u(\cdot)$ が与えられたとき，確実同値額は $E[u(x)] = u(CE)$ を満たす CE で定義される．そして，リスク・プレミアムを ρ とすると $CE = E[x] - \rho$ が成立する．

さて，$u(E[x] - \rho)$ を線形近似すると

$$\begin{aligned} u(E[x] - \rho) &= u(E[x]) + u'(E[x])(E[x] - \rho - E[x]) \\ &= u(E[x]) - u'(E[x])\rho \end{aligned}$$

が成立し，よって

$$E[u(x)] = u(E[x] - \rho) = u(E[w]) - u'(E[w])\rho$$

を得る．また，$u(E[x] - \rho)$ をある x のまわりでテイラー展開すると

$$u(x) = u(E[x]) + u'(E[x])(x - E[x]) + \frac{1}{2}u''(E[x])(x - E[x])^2$$

という関係が成立し，両辺の期待値をとると

$$Eu(x) = u(E[x]) + \frac{1}{2}u''(E[x])\sigma^2$$

が成立する．

以上より，

$$u(E[x]) - u'(E[x])\rho = u(E[x]) + \frac{1}{2}u''(E[x])Var[x]$$

すなわち

$$\rho = -\frac{u''(E[x])}{u'(E[x])}\frac{1}{2}Var[x]$$

が成立する．ここで，$r(x) = -u''(x)/u'(x)$ は効用関数の曲率を測る指標で，絶対的リスク回避度と呼ばれる．$r(x)$ が大きいほど，効用関数の曲率は大きく，よりリスク回避的だと判断できる．

実際，リスク・プレミアム ρ は確率変数の分散と絶対的危険回避度に比例し，$\rho = r(E[x])\frac{1}{2}Var[x]$ という関係を得ることができる．また，$CE = E[x] - \rho$ なので，

$$CE = E[x] - \frac{r(E[x])}{2}\sigma^2$$

が近似的に成立する．

また，効用関数として特に $u(x) = -e^{-rx}$ を考える．すると，$u'(x) = re^{-rx} > 0$，$u''(x) = -r^2e^{-rx} < 0$ が成立し，$r(x) = -u''(x)/u'(x) = r$ となる．つまり，絶対的危険回避度は一定となる．ここで，この結果を線形契約モデルに適用するために，w と努力費用 $C(e)$ について効用を $u(w - C(e)) = -e^{-r(w-C(e))}$ とし，リスクは正規分布に従うとする．すると，確実同値額は

$$CE = E[w] - C(e) - \frac{r}{2}\beta^2\sigma^2$$

となり，ここでの想定のもとでは，これは近似ではなく正確に成立する．そして，効用関数は単調増加なので，CE の最大化はすなわち期待効用の最大化を意味することになる．

補論 3–2　線形契約は最適か？

線形契約は，モラルハザード問題の本質をとらえながらも，その解を明示的に得ることができるという点で非常に優れたモデルといえる．しかし，このように非常に優れた線形契約にも問題が全くないわけではない．それは，契約の範囲を線形に限定しているという点だ．

もう少し詳しく見てみよう．収益 x は連続に分布している確率変数なので，契約は実現しうる全ての x に対して報酬を指定する関数 $w(\cdot)$ として表すことができる．しかし，ここで問題となるのは，この関数がどのような形状をとるのかわからないことだ．モラル・ハザード問題での最適契約は，効用関数だけでなく，不確実性の分布にも強く依存するため，例えば単調性（報酬が収益に対して単調に増加）のような単純な性質でさえ成り立たない可能性を持つ．

モラル・ハザード問題の最適契約の特徴づけは困難だが，それでも多くの場合において線形契約が最適とならないことを示すことは可能だ．例えば不確実性 ε が正規分布に従っているとしよう．このとき，もし効用に下限がなければ，収益が極端に低くない限りは固定給を支払い，収益が極端に低いときに強い罰則を課す「二段階契約」によってファースト・ベストを近似できることが知られている．こうした契約がうまく機能する理由は，正規分布は裾が薄い性質を持つため，努力したにもかかわらず極端に低い収益が実現する確率が，そうでない場合と比較して相対的に低いことにある．そのため，極端に収益が低いとき以外は固定報酬にすることで，エージェントが直面するリスクを最小限にすることができる．

では，このような状況で，最適とはいえない線形契約に焦点を限定することは果たして正当化できるのだろうか．この問題を扱ったのがホルムストロームとミルグロムによる研究だ．彼らは，こうした複雑な「最適契約」は，モデル設定の細部の仮定に非常に強く依存しており，この仮定が少しでもずれるとその形状も大きく変化する可能性に着目した．つまり，二段階契約のような極端な契約は，仮定が全て正確に満たされている限りにおいては最適だが，契約環境の不確実性に対して頑健でないということだ．

こうした主張の自然な定式化として彼らは次のような動学モデルを提唱した．エージェントは各時点で努力を決定し，その努力水準に応じて確率的にその期の収益が（他の期とは独立に）実現する．一方で，プリンシパルは実現した収益の経路に依存した契約を書くことができ，報酬をゲームの最後に支払う．ここで重要なのは，エージェントは各時点までに実現した不確実性を観察でき，それに応じて自分の行動を変化させることができるという点だ．そのため，エージェントの戦略空間は，エージェントが一度だけ努力を選択する静学モデルと比較して格段に大きなモデルとなっている．

この環境で，先に述べた二段階契約が機能するか見てみよう．二段階契約の下でエージェントにとって重要なのは，収益がノルマを少しでも上回って罰則を受けないことだけだ．すると，たまたま幸運で高い収益が実現すると，ノルマを達成できる可能性が高くなるので，エージェントはそれ以降は努力をするインセンティブを失ってしまう．逆に言うと，とりうる戦略の幅が大きくなったことで，エージェントはノルマぎりぎりに収益を調整することが可能になったともいえる．しかし，

収益は各期独立なので，プリンシパルの立場からすると，エージェントには常に最適な努力をしてもらう方が望ましい．結果として，こうした操作を可能とする二段階契約のような極端な契約は収益の期待値を低下させてしまう．

一方で，線形契約であれば，努力のインセンティブは，どのような収益が実現していたとしても変わらないので，常に（その時点で）最適な努力を引き出すことができる．技術的な詳細は省くが，これより，エージェントが取りうる戦略の幅が大きく，様々な「調整」が可能な状況では，線形契約のようなシンプルな契約の方がうまく機能するという主張が成り立つ．環境が複雑になるにつれて契約がシンプルになるというのは逆説的ではあるが重要なメッセージを与える．

この議論は線形契約を用いることに対する理論的根拠を与えてくれる．現在では，線形契約は応用研究を中心に幅広く用いられているが，これはひとえに彼らの議論に負うところが大きい．

（参考文献） Bengt Holmstrom and Paul Milgrom, 1987, Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives, *Econometrica*, 55(2), 303-328