第 10 章・補論 3：掛け算の変化率と成長会計の導出[*1]

成長会計を数学的に厳密では無いですが，簡単な導出を紹介します。準備として，**掛け算の変化率は，変化率の和で表せる**ことを利用しましょう。次の例で説明しましょう。$z = xy$ という二つの変数の掛け算からなる z を考えるとき，z の変化率 $\frac{\Delta z}{z}$ を求めてみましょう。x の変化と y の変化を合わせたものが z の変化に相当します。x の変化分を Δx，y の変化分を Δy とするとき，$z = xy$ の変化率は

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta z}{z} &= \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy}{xy}, \\
&= \frac{xy + \Delta x \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y - xy}{xy} \\
&= \frac{\Delta x \times y + x \times \Delta y + \Delta x \Delta y}{xy}
\end{aligned}
$$

と書くことができる。ここで小さい数字同士の積である $\Delta x \Delta y$ は非常に小さい数字であることから，ほぼ 0 として無視することにすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta z}{z} &\approx \frac{\Delta x \times y + x \times \Delta y}{xy} \\
\Longrightarrow \frac{\Delta z}{z} &\approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}
\end{aligned}
$$

を得る。つまり **x と y の積である z の変化率は，x の変化率と y の変化率の和**として表せます。具体的に数字の例を見てみましょう。下の表では，二行目と三行目において今年の x と y の値，および翌年の x と y の値，そして $x \times y$ の値を表示しています。四行目では，それぞれの変化率を示しています。x の変化率は 3%，y の変化率は 5% です。このとき，$x \times y$ の変化率は 8.15% と，約 8% になっており，上記の近似が概ね良いことを確認できます。

	x	y	$x \times y$
今年	100	2.0	200.0
翌年	103	2.1	216.3
変化率	3%	5 %	8.15% $\approx$ 8%

さて，以上の知識を踏まえて成長会計を導出してみましょう。生産関数は少し一般的に α のままのコブ・ダグラス型生産関数を用います。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

A は全要素生産性です。今 K^{α} は，K を α 回掛けあわせたものですから，コブ・ダグラス型生産関数は次の掛け算と読み替えることができます。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \underbrace{A}_{1\text{ 回}} \times \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\alpha\text{ 回}} \times \underbrace{L \times \cdots \times L}_{1-\alpha\text{ 回}}.$$

先ほどのにある「掛け算の変化率は，変化率の和で表せる」という性質を利用すると，以下のように各項の変化率の和に書き直すことができます。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y}{Y} &= \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{1\text{ 回}} + \underbrace{\frac{\Delta K}{K} + \cdots + \frac{\Delta K}{K}}_{\alpha\text{ 回}} + \underbrace{\frac{\Delta L}{L} + \cdots + \frac{\Delta L}{L}}_{1-\alpha\text{ 回}}, \\ \Longrightarrow \frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L}. \end{aligned}$$

この式は，GDP の成長率 $\frac{\Delta Y}{Y}$ を，全要素生産性の貢献部分 $\frac{\Delta A}{A}$，資本の貢献部分 $\frac{\Delta K}{K}$，労働の貢献部分 $\frac{\Delta L}{L}$ に要因分解したものです。技術の貢献部分 $\frac{\Delta A}{A}$ について解くと，

$$\underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\substack{\text{全要素生産性}\\\text{の変化率}}} = \underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\substack{\text{GDP の}\\\text{変化率}}} - \underbrace{\left[\alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L}\right]}_{\text{資本と労働の貢献部分}}$$

を得ることができます。

対数の性質を利用する

対数を知っている人は，もっと計算が簡単になります。いま対数の底をネイピア数 e とした自然対数を $\ln x \equiv \log_e x$ と表記することにします。対数の計算方法をまとめると以下のようになります。証明等は数学の教科書に譲ることにし，ここでは以下の性質を利用するだけにします。

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^a) = a \ln x$
- $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$
- $\frac{d \ln(x_t)}{dt} = \frac{d \ln(x_t)}{dx_t} \times \frac{dx_t}{dt} = \frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$

最後の一つは，時間と共に変化する x_t という変数に対数を取った $\ln(x_t)$ を時間 t で微分したものです。$\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$ は x の変化率を意味し，先ほどの説明の $\frac{\Delta x}{x}$ とほぼ同じものを意味していると考えて差し支えありません。

生産関数の両辺に対数を取ると，

$$\begin{aligned} & Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ \Longrightarrow \; & \ln Y_t = \ln A_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t \end{aligned}$$

ここで両辺を時間 t について微分すると，

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} = \frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t} + \alpha \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} + (1-\alpha) \frac{\frac{dL_t}{dt}}{L_t} \\ \Longrightarrow \; & \frac{\frac{dA_t}{dt}}{A_t} = \frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} - \left[\alpha \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} + (1-\alpha) \frac{\frac{dL_t}{dt}}{L_t} \right] \end{aligned}$$

を得ます。$\frac{\frac{dx_t}{dt}}{x_t}$ は x の変化率を意味し，先ほどの説明の $\frac{\Delta x}{x}$ とほぼ同じものを意味しています。厳密な説明ではありませんが，誤解を恐れず置き換えま

しょう。

$$\underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\substack{\text{全要素生産性}\\\text{の変化率}}} = \underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\substack{\text{GDP の}\\\text{変化率}}} - \underbrace{\left[\alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L}\right]}_{\text{資本と労働の貢献部分}}$$

先ほど導出した成長会計の式を得ることができます。