第 3 章 補足：成長会計の公式の導出についてのノート

57 ページでは，成長会計の公式

経済成長率＝技術進歩率＋α×資本増加率＋(1－α)×労働増加率

を紹介しました。このノートでは，この公式の導出過程を説明します。

このノートの数学付録で示されているように，$z = w^o x^n y^m$ であるとき，次のような関係が成り立ちます。

> $z = w^o x^n y^m$ であるとき，
>
> $$\frac{\Delta z}{z} = o\frac{\Delta w}{w} + n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}$$
>
> となる。

成長会計の公式は，この関係をマクロ生産関数に当てはめることで導出できます。本書で用いられたマクロ生産関数は 46 ページに書かれているとおり，

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\quad 0 < \alpha < 1$$

です（この生産関数は**コブ・ダグラス型**と呼ばれます)。$A = A^1$ ですので，$Y = A^1K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ と書き直して，上の関係を当てはめると

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 1\times\frac{\Delta A}{A} + \alpha\times\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\times\frac{\Delta L}{L}$$

となります。$\frac{\Delta Y}{Y}$ は経済成長率，$\frac{\Delta A}{A}$ は技術進歩率，$\frac{\Delta K}{K}$ は資本増加率，$\frac{\Delta L}{L}$ は労働増加率（人口成長率）ですので，結局

経済成長率＝技術進歩率＋α×資本増加率＋(1－α)×労働増加率

となり，成長会計の公式が得られます。

数学付録

この付録では，

$z = w^o x^n y^m$ であるとき，

$$\frac{\Delta z}{z} = o\frac{\Delta w}{w} + n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}$$

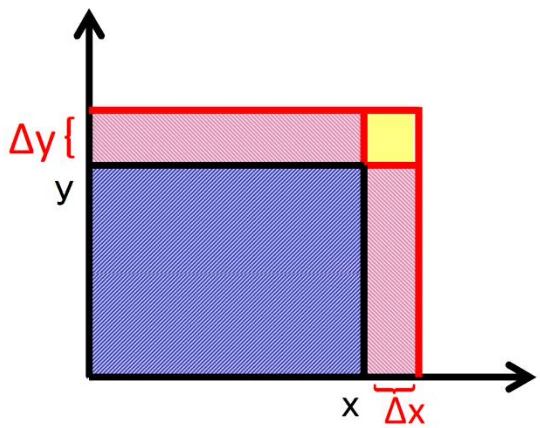
となる。

を導きます。

今，ある変数 z は他の変数 x と y の積として定義されているとします。つまり

$$z = xy$$

とします。z は x と y の積ですので，x と y がともに正であるとすれば，下図の紫色の長方形の面積で表されています。



では，x と y がそれぞれほんの少しだけ増加した場合に，z の値はどう変化するでしょうか？z，x，y の変化分を Δz，Δx，Δy で表すことにします。このとき，図に描かれている通り，x と y が増加した後の z の値は $(x+\Delta x)(y+\Delta y)$ となります。したがって，z の変化分は

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy \\ &= xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy \\ &= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y\end{aligned}$$

となります。ここで，図ではΔx，Δyはわかりやすくするために，大きく描かれています が，実際はどちらも小さな数字です。例えば，それぞれが$\frac{1}{100}$であったとしてみると，$\Delta x\Delta y$（黄色の長方形の面積）は$\frac{1}{10000}$になり，非常に小さな数字になります。したがって，ΔxとΔyを十分小さくすれば，$\Delta x\Delta y=0$と見なすことができます。つまり

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x$$

と書くことができるのです。この両辺を$z=xy$で割ると（左辺はzで割り，右辺はxyで割ります），

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{x\Delta y}{xy} + \frac{y\Delta x}{xy} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x}$$

となります。これをまとめると次の公式が得られます。

公式 1

$z=xy$であるとき，

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

が成り立つ。

次に，

$$z = x^2$$

を考えます。xをΔxだけ増加させてみましょう。このときzの値は$(x+\Delta x)^2$となりますので，zの変化分Δzは

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\times\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\\ &= 2x\times\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

となりますが，先ほどの場合と同じ理由により，$(\Delta x)^2$を 0 と見なすことができます。つまり

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\times\Delta x$$

と見なすことができるのです。したがって，$z=x^2$のときには

$$\Delta y = 2x\times\Delta x$$

となります。同じようにして $z = x^3$ のときを考えると

$$
\begin{aligned}
(x+\Delta x)^3 &= (x+\Delta x)\times(x+\Delta x)^2 \ = (x+\Delta x)\times\left(x^2+2x\times\Delta x\right) \\
&= \left(x^3+2x^2\times\Delta x+\Delta x\times x^2+2x\times\left(\Delta x\right)^2\right) \quad \Leftarrow (\Delta x)^2=0 \qquad \text{(n3)} \\
&= \left(x^3+3x^2\times\Delta x\right)
\end{aligned}
$$

となりますので，

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= \left(x^3+3x^2\times\Delta x\right)-x^3 \\
&= 3x^2\times\Delta x
\end{aligned}
$$

となります。 $z = x^4$ の時も同様で，

$$
\begin{aligned}
(x+\Delta x)^4 &= (x+\Delta x)\times\left(x+\Delta x\right)^3 = (x+\Delta x)\times\left(x^3+3x^2\times\Delta x\right) \qquad \Leftarrow (n3) \\
&= \left(x^4+3x^3\times\Delta x+\Delta x\times x^3+3x^2\times\left(\Delta x\right)^2\right) \qquad \Leftarrow (\Delta x)^2=0 \\
&= \left(x^4+4x^3\times\Delta x\right)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= (x+\Delta x)^4-x^4 = \left(x^4+4x^3\times\Delta x\right)-x^4 \\
&= 4x^3\times\Delta x
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。以上のことから $z = x^n$ のとき，

$$
(x+\Delta x)^n = \left(x^n+nx^{n-1}\times\Delta x\right) \qquad \text{(A1)}
$$

$$
\Delta z = nx^{n-1}\times\Delta x \qquad \text{(A2)}
$$

となることが予想できます。ここで， $n=1$ のときに(A1)と（A2)が成り立っていることはすでに見ていますので，$n=\alpha$ のときに(A1)と(A2)が成り立っているものとして，$n=\alpha+1$ のとき，つまり， $z = x^{\alpha+1}$ のときをみてみましょう。まず， $(x+\Delta x)^{n+1}$ については

$$
\begin{aligned}
(x+\Delta x)^{n+1} &= (x+\Delta x)\times(x+\Delta x)^n = (x+\Delta x)\times\left(x^n+nx^{n-1}\times\Delta x\right) \quad \Leftarrow \text{(A1)} \\
&= \left(x^{n+1}+(n+1)x^n\times\Delta x+nx^{n-1}\times(\Delta x)^2\right) \qquad \Leftarrow (\Delta x)^2=0 \qquad \text{(A3)} \\
&= x^{n+1}+(n+1)x^n\times\Delta x
\end{aligned}
$$

となり， $n=\alpha+1$ としても（A1)が成立しています。したがって， Δz は

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= (x+\Delta x)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1} \\
&= \left(x^{\alpha+1}+(\alpha+1)x^\alpha\times\Delta x\right)-x^{\alpha+1} \qquad \Leftarrow \text{(A3)} \\
&= (\alpha+1)x^\alpha\times\Delta x
\end{aligned}
$$

となり，(A2)も成立していることがわかります。結局，すべての自然数 n について（A1）

と(A2)が成立することが確認できました。

ここまで，これまでnが自然数の場合に限ってみてきましたが，実はnが負の場合でも分数の場合でも(A2)は成立します。

以上のことをまとめると次の公式になります。

公式２

$z = x^n$において，xがΔxだけわずかに増加すると，xの変化は

$$\Delta z = nx^{n-1} \times \Delta x$$

となる。

ここで，$z = x^n y^m$という関数を考えます。xとyがそれぞれΔxとΔyだけ増加したときのzの変化はどうなるでしょうか。$X = x^n$，$Y = y^m$とおくと$z = XY$となるので，公式１がそのまま使えます。したがって

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y} \tag{A4}$$

が成り立ちます。また，$X = x^n$，$Y = y^m$に公式２を当てはめると

$$\Delta X = nx^{n-1} \times \Delta x, \quad \Delta Y = my^{m-1} \times \Delta y$$

となります。これらを（A4）に代入すると

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{nx^{n-1} \times \Delta x}{X} + \frac{my^{m-1} \times \Delta y}{Y}$$

となりますが，$X = x^n$，$Y = y^m$ですので，

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{nx^{n-1} \times \Delta x}{x^n} + \frac{my^{m-1} \times \Delta y}{y^m} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}$$

という関係が成立します。以上をまとめると次の公式になります。

公式 3

$z = x^n y^m$であるとき，

$$\frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}$$

が成り立つ。

同じようにして，変数が増えても同じ関係が成立することを示すことができます。

公式 4

$z = w^o x^n y^m$ であるとき，

$$\frac{\Delta z}{z} = o\frac{\Delta w}{w} + n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}$$

が成り立つ。

成長会計の公式の導出に用いたのはこの結果です。

＜補足＞　対数の微分をすでに学習しているのならば，$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ の両辺の自然対数をとると（すべての変数は正の値をとることに注意），

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L$$

となります。両辺を時間 t で微分すると

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$

となり（ここで $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$, $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$,　$\dot{L} = \frac{dL}{dt}$ です），直ちに成長会計の公式を得ることができます。