入門・証券投資論 Web付録

岸本直樹 池田昌幸

2020年6月18日　第2版

（2019 年 12 月 10 日第 1 版から第 2 版への内容上の改訂点）

- 第 1 版 p .4 の本文の 1 行目から 2 行目までの「アットパーのとき（2.1）式右辺の分子第 2 項が 0 になるので，右辺全体が $\frac{C}{P}$ となり」は，第 2 版 p. 4 の本文の 1 行目から 3 行目までの「アットパーのとき $P = F$ なので（2.1）式右辺の分子第 2 項が 0 になり，分母が F になるので，右辺全体が $\frac{C}{F}$ となり」に書き換えました。
- 第 1 版 p. 24 の（38）式の直前の文にある「（36）式が導出できます」は，第 2 版 p. 24 の（38）式の直前の文の「（38）式が導出できます」に書き換えました。
- 第 1 版 p. 25 の（39）式の直前の文にある「次式の 2 行目から 3 行目への変形では（33）式」は，第 2 版 p. 25 の（39）式の直前の文の「次式の 2 行目から 3 行目への変形では（34）式」に書き換えました。
- 第 1 版 p. 30 の最後の文である「もちろん, Ke^{-rT} が K より小さいので, プットの漸近線はペイオフ・ダイアグラムと交わります」は，第 2 版 p 30 の最後の文の「もちろん, Ke^{-rT} が K より小さいので, 6.5 節で指摘したように，プットの理論価格を表すグラフは左端がペイオフ・ダイアグラムに交わっています」に書き換えました。

（第 2 章の Web 付録 1）複利最終利回りと実効利回りの関係

2.4 節の「再投資リスク」の項で「再投資利子率が 0 時点で計算した複利最終利回りを下回る (あるいは, 等しい, あるいは, 上回る) と, 実効利回りも複利最終利回りを下回る (あるいは, 等しい, あるいは, 上回る)」ことを数値例を使って示しました。本 Web 付録ではこの性質を残存期間が 1 年半の固定利付債の場合について証明します。まず, この債券の 1 年当たりのクーポンを C, 額面を F で表します。このとき, この債券の複利最終利回り (半年複利) は, 次式を満たす y です。

$$P = \frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{y}{2}} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2} + \frac{F+\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3} \tag{1}$$

次に, 半年後および 1 年後の再投資利子率がすべて i だったとしましょう。このとき, 当該債券から受け取るキャッシュフローの 1 年半後の将来価値 FV は次式で表せます。

$$\mathrm{FV} = \frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right) + \left(F+\frac{C}{2}\right) \tag{2}$$

2.4 節の「再投資リスク」の項と同様, 当該債券を償還期限まで保有したときの実効利回り r は, 次式を解く r として求められます。

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^3 P = \mathrm{FV} \tag{3}$$

(1) 式と (2) 式を (3) 式に代入すると次式を得ます。

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{r}{2}\right)^3 \left[\frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{y}{2}} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2} + \frac{F+\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3}\right] \\
&= \frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right) + \left(F+\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

左辺を $(1+\frac{y}{2})^3$ で割って, 同時に $(1+\frac{y}{2})^3$ を掛けると次式を得ます。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+\frac{r}{2}}{1+\frac{y}{2}}\right)^3\left[\frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)+\left(F+\frac{C}{2}\right)\right]\\ &= \frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)^2+\frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)+\left(F+\frac{C}{2}\right) \qquad (4)\end{aligned}$$

さらに, (4) 式の両辺を, 左辺の角括弧内の表現で割ると次式を得ます。

$$\left(\frac{1+\frac{r}{2}}{1+\frac{y}{2}}\right)^3=\frac{\frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)^2+\frac{C}{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)+\left(F+\frac{C}{2}\right)}{\frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)+\left(F+\frac{C}{2}\right)} \qquad (5)$$

さて, (5) 式の右辺の分子と分母は変数 y と変数 i が入れ換わったという点以外完全に同じ表現です。また, この表現は y あるいは i が大きくなるほど大きな値をとります。したがって, もし再投資利子率 i が複利最終利回り y と等しければ, 分子と分母が同じ値をとり右辺全体が 1 になるため, 左辺も 1 にならなければなりません。すなわち, $r=y$ となり実効利回り r が複利最終利回り y に等しくなります。他方, もし再投資利子率 i が複利最終利回り y を上回れば, (5) 式の右辺の分子が分母より大きな値をとり右辺全体が 1 より大きくなるため, 左辺も 1 より大きくなければなりません。すなわち, $r>y$ が成立し, 実効利回り r が複利最終利回り y より大きな値をとります。さらに, もし再投資利子率 i が複利最終利回り y を下回れば, 逆のことが起こり, $r<y$ となり, 実効利回り r が複利最終利回り y を下回ります。

（第 2 章の Web 付録 2）アットパーのとき最終利回りはクーポンレートに一致するという性質

まず, 単利最終利回りの場合この性質が成立するのは明らかです。なぜならば, アットパーのとき $P = F$ なので，(2.1) 式右辺の分子第 2 項が 0 になり，右辺の分母が F になるので, 右辺全体が $\frac{C}{F}$ となり, クーポンレートを表すからです。そこで, 本 Web 付録では, この性質が複利最終利回り (半年複利) についても成立することを示します。具体的には, この性質を残存期間がちょうど 1 年半で, 1 年当たり 2 回利払する固定利付債の場合について証明します。まず, この債券の 1 年当たりのクーポンを C, 額面を F で表します。このとき複利最終利回り (半年複利) y は次式の解ですから, 当然次式を満たします。

$$P = \frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{y}{2}} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2} + \frac{F+\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3} \tag{6}$$

もしアットパーであれば, P は F に等しいから, (6) 式の左辺を F に置き換えることができます。すなわち, 次式を得ます。

$$F = \frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{y}{2}} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2} + \frac{F+\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3} \tag{7}$$

(7) 式の両辺に $\left(1+\frac{y}{2}\right)^3$ を掛けると次式を得ます。

$$F\left(1+\frac{y}{2}\right)^3 = \frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{C}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) + F + \frac{C}{2} \tag{8}$$

(8) 式の右辺の F を左辺に移行し, 右辺を $\frac{C}{2}$ について因数分解すると次式を得ます。

$$F\left[\left(1+\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right] = \frac{C}{2}\left[\left(1+\frac{y}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{y}{2}\right) + 1\right] \tag{9}$$

(9) 式の右辺の角括弧に 4.8 節で紹介する等比級数 S_n の公式を適用すると次式を得ます。

$$F\left[\left(1+\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right] = \left(\frac{C}{2}\right)\frac{1-\left(1+\frac{y}{2}\right)^3}{1-\left(1+\frac{y}{2}\right)} \tag{10}$$

(10) 式の右辺の分母を整理すると, $-y$ になるので, (10) 式は次式に変形できます。

$$F\left[\left(1+\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right] = \left(\frac{C}{y}\right)\left[\left(1+\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right] \tag{11}$$

(11) 式の両辺を角括弧の中の表現で割ると次式を得ます。

$$F = \frac{C}{y} \tag{12}$$

さらに, (12) 式の両辺を F で割り, y を掛けると次式を得ます。

$$y = \frac{C}{F} \tag{13}$$

(13) 式の C は額面 F 当たりのクーポンの額を表すので, $\frac{C}{F}$ はクーポンレートを表します。したがって, (13) 式は複利最終利回り (半年複利) がクーポンレートに等しいことを示しています。

（第 3 章の Web 付録）修正デュレーションの公式の導出

修正デュレーションは次式で定義されます。

$$D_{MOD} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}$$

また, 最終利回りの定義式を再掲します。

$$P = \frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{y}{2}} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2} + \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3} + \cdots + \frac{\frac{C}{2}+F}{(1+\frac{y}{2})^{2n}} \tag{14}$$

そこで, まず, （14）式の i 番目の項, あるいは, 最後の項を z と表して考察しましょう。

$$z = \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^i} \quad \text{or} \quad \frac{\frac{C}{2}+F}{(1+\frac{y}{2})^{2n}}$$

次に, 合成関数の微分の公式 (chain rule) を利用するために z を合成関数として表現します。

$$\begin{aligned} z &= \frac{C}{2}\ v \ \ \text{or} \ \ \left(\frac{C}{2}+F\right)\ v \\ v &= \frac{1}{u^i} = u^{-i} \ \ \text{or} \ \ \frac{1}{u^{2n}} = u^{-2n} \\ u &= 1+\frac{y}{2} \end{aligned}$$

ここで念のため上式の z が i 番目の項を表していることを確認します。

$$z = \frac{C}{2}\ v = \frac{\frac{C}{2}}{u^i} = \frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^i}$$

次に, z, v, u のそれぞれを微分します。

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dv} &= \frac{C}{2} \ \ \text{or} \ \ \frac{C}{2}+F \\ \frac{dv}{du} &= -i\ u^{-i-1} = -i\ \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{i+1}} \ \ \text{or} \ \ -2n\ u^{-2n-1} = -2n\ \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{2n+1}} \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

i 番目の項について合成関数の微分の公式を使います。

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dy} \\ &= \frac{C}{2}(-i)\frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{i+1}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^{i+1}}\ \frac{i}{2} \end{aligned}$$

したがって, 修正デュレーションは次式で表せます。

$$
\begin{aligned}
D_{MOD} &= -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} \\
&= \frac{1}{P}\left[\frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^3}\left(\frac{2}{2}\right)+\cdots+\frac{\frac{C}{2}+F}{(1+\frac{y}{2})^{2n+1}}\left(\frac{2n}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+\frac{y}{2}}\frac{1}{P}\left[\frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{C}{2}}{(1+\frac{y}{2})^2}(1)+\cdots+\frac{\frac{C}{2}+F}{(1+\frac{y}{2})^{2n}}n\right]
\end{aligned}
$$

（第 4 章の Web 付録 1）日経平均の算出方法

この Web 付録では, 日経平均の概略を紹介します。この株価指数は 1950 年 9 月から算出されています。計算方法は, 東証第 1 部に上場されている 225 銘柄の株価あるいはそれを調整したものを合計し, それを 1950 年 9 月時点では銘柄数の 225, その後は, 銘柄数を調整した除数と呼ばれるもので割って算出されます。それでは, 最初に, 株価の調整について説明すると, 4.1 節で指摘したように, 2001 年 9 月以前は額面制度が存在し, 銘柄によって額面金額が異なっていました。そこで, 50 円以外の額面を使っている株式については, 仮に額面が 50 円だったと仮定した場合に付くと考えられる株価を日経平均を計算するのに使っていました。たとえば, 額面が 500 円で株価が 4380 円の株式の場合, 額面が 10 分の 1 の 50 円だったとすれば, 株価も 10 分の 1 の 438 円になると考えられるので, 438 円を日経平均の計算に使っていました。もちろん, 2001 年 10 月以降, 額面制度が廃止されました。しかし, 銘柄によって株価の水準が大きく異なる状況が続いたので, 現在でも各銘柄に額面金額を割り当てて (この額面は**みなし額面**と呼ばれます), みなし額面が 50 円以外の銘柄については上記の方法で株価を調整して日経平均の計算に使っています。たとえば, 2018 年 11 月 7 日のセイコーエプソンのみなし額面は 25 円で同日の終値は 1885 円だったので, 日経平均の計算には 1885 円を 2 倍した 3770 円が使われます。なお, 2018 年 11 月 7 日において日経平均に採用されている 225 銘柄のみなし額面をみると, 111 銘柄が 50 円で, 残りの 114 銘柄は 50 円以外の金額でした。ちなみに, 株式会社は株式分割や, その反対の株式併合 (複数の株式を 1 株にまとめること) をすることがあります。それらのうち, 大型の株式分割や株式併合については, みなし額面を変更して上記の株価調整が行われます。他方, それ以外の株式分割や株式併合については次に紹介する除数の調整によって対応します。

それでは, 次に**除数**の説明を始めます。日経平均を算出する日本経済新聞社は, 同指数を構成する銘柄を定期的に見直しています。見直しの結果, 銘柄を入れ替える場合, 通常, 外される銘柄と加えられる銘柄は株価が異なるので, 何の調整もしなければ, 入れ替えるだけで日経平均が上がったり, 下がったりします。そこで, このような変化が起きないようにするために, 銘柄の入れ替えがあるたびに除数が調整されます。また, 株式分割や株式併合のうち東証が大型とみなさないものについては除数で調整されます。ただし, 配当落ちによる株価変化ついてはみなし額面でも除数でも調整されません。

（Web）除数の調整方法を知りたい読者は, 日経平均に関する次の Web ページを参照してください。https://indexes.nikkei.co.jp/atoz/2017/04/divisor.html

ちなみに, 除数は, 日本経済新聞朝刊の「クローズアップ日経平均株価」欄に掲載されています。たとえば, 2018 年 11 月 7 日の除数は 11 月 8 日の朝刊に掲載されていて, 26.993 でした。したがって, 日経平均の 11 月 7 日の終値の 2 万 2085 円 80 銭は次の計算によって算出されたものです。

$$\frac{225\text{ 銘柄の株価あるいは調整株価の和}}{26.993} = 2\text{ 万 }2085\text{ 円 }80\text{ 銭} \tag{15}$$

次に, (15) 式の左辺に 225 を掛けて 225 で割ってみましょう。

$$\frac{225}{26.993} \times \frac{225\text{ 銘柄の株価・調整株価の和}}{225} \tag{16}$$

$$= \ 8.33549 \times (225\text{ 銘柄の株価・調整株価の単純平均}) \tag{17}$$

(17) 式の表現から, 2018 年 11 月 7 日の日経平均終値が日経平均構成銘柄の株価あるいは調整株価の単純平均を約 8.3 倍したものであることが分かります。この点に気がつくと, 日経平均の水準が 11 月 7 日時点で 2 万 2085 円 80 銭と, 構成銘柄の平均的な株価よりずっと高いのに合点がいくでしょう。また, 日経平均は構成銘柄の株価の単純平均ではないけれども,「一種の単純平均」であると言っていいことも分かります。したがって, 株価あるいは調整株価が高い銘柄や値動きの荒い銘柄が日経平均を大きく左右することになります。

（第 4 章の Web 付録 2）TOPIX の算出方法

この Web 付録では, TOPIX の概略を紹介します。TOPIX は, 東証第 1 部に上場されている各銘柄について次に説明する浮動株の株数（東証は指数用株式数と呼んでいます）に株価を掛け, それをすべての上場銘柄について合計して, それを東証が基準時価総額と呼ぶもので割り, さらに, 100 を掛けて指数として表現したものです。すなわち, TOPIX は次の計算式で算出されます。

$$100 \times \frac{\sum_{i=1}^{N}(i\,\text{銘柄の指数用株式数}) \times (i\,\text{銘柄の株価})}{\text{基準時価総額}} \tag{18}$$

ただし,（18）式の N は TOPIX を構成する銘柄数を表します。

それでは次に, **浮動株**について説明します。発行済株式のうち, 自己株式（株式会社が保有する自社株式）のほか, 政府, 親会社, 役員, さらに, 大株主が保有する株式は, 多くの場合, 長期的に保有され市場で流通しません。そこで, そのような株式を除いて実際に市場で流通しそうな株数を指数用株式数と呼び, それに株価を掛け合わせて指数用時価総額を計算します。

次に, 基準時価総額について説明します。基準時価総額は, ひとつには, TOPIX がその基準時点である 1968 年 1 月 4 日に 100 の値をとるようにするための仕掛けです。また, 東証第 1 部では, 毎年, 新たに上場される銘柄もあれば, 上場廃止になる銘柄もあります。また, 上場銘柄について有償増資が行われれば, 調達した金額だけその銘柄の指数用時価総額が増加します。しかし, TOPIX 算出の目的は東証第 1 部上場銘柄全体の株価の動きを把握することにあるので, 上場銘柄の変更や有償増資によって TOPIX が変動することは望ましくないです。そこで, これらの要因によって TOPIX が変動しないように基準時価総額が調整されます。これが, 基準時価総額のもうひとつの役割りです。

最後に, (18) 式を少し分析して TOPIX の意味合いを考えてみましょう。そのため, (18) 式を, 東証第 1 部上場銘柄のすべてについて指数用株式数を合計したもの (次の式の指数用株式数合計) で割って, さらに, 同じものを掛けます。すなわち, 次の表現に変形します。

$$\begin{aligned} &100 \times \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i\,\text{銘柄の指数用株式数}}{\text{指数用株式数合計}}\right) \times (i\,\text{銘柄の株価})\right] \\ &\quad \times \left(\frac{\text{指数用株式数合計}}{\text{基準時価総額}}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

表現 (19) 式から, TOPIX が東証第 1 部全銘柄の株価を指数用株式数をウェイトにして加重平均したものに, 指数用株式数合計と基準時価総額の比を掛け合わせたものであることが分かります。したがって, 各銘柄が TOPIX に及ぼす影響の度合いはその銘柄の指数用株式数に比例します。すなわち, 指数用株式数が多い銘柄ほど TOPIX に及ぼす影響が大きくなります。よって, TOPIX は東証第 1 部全銘柄の株価の加重平均ではありませんが, それに近い性質を持っていると言えます。

（第 4 章の Web 付録 3）$-1 < \frac{1+g}{1+k} < 1$ が満足されていることの確認

この Web 付録では, g と k が $-1 < \frac{1+g}{1+k} < 1$ を満たすことを確認します。まず, k は割引率なので正の数でなければなりません。なぜならば, もし割引率が負の数であれば, たとえば, 1 年後に受け取る不確実な 100 万円の現在価値が 100 万円か, あるいは, それを上回るからです。したがって, $1+k$ も正の数になるので, $-1 < \frac{1+g}{1+k} < 1$ に $1+k$ を掛け合わせたとき, 不等式の方向が変わりません。よって, 次式を得ます。

$$-1-k < 1+g < 1+k \tag{20}$$

最初に, (20) 式の左側の不等式が成立することを確認します。この不等式の 1 と k を移行すると, $-2 < k+g$ を得ます。そこで, この不等式が成立しないケース, すなわち, $k+g \leq -2$ が起こり得るかどうか考えてみましょう。上で指摘したように k は正なので, $k+g \leq -2$ が成立するためには, g が -2 より小さな数でなければなりません。たとえば, $g = -2.5$ であるとすると, 1 期後の配当が 100 円の場合, 2 期後の配当は $(1-2.5) \times 100$ 円 $= -150$ 円になってしまいます。配当が負になることはあり得ないので, g が -2 より小さな数になることはあり得ません。また, その結果, $k+g \leq -2$ も起こり得ないです。したがって, $-2 < k+g$ は必ず成立します。

次に, (20) 式の右側の不等式が成立することを確認します。まず, 右側の不等式の両辺から 1 を引くと $k > g$ を得ます。すなわち, これは割引率 k が成長率 g より大きいという条件です。そこで, この条件 $k > g$ が成立しないことがあり得るかどうか, すなわち, $k \leq g$ が起こり得るかどうかを検討します。具体的には, m 期後に受け取る配当の期待値 D_m の値を検討します。定率成長モデルの仮定の下では $D_m = (1+g)^{m-1}D_1$ なので, その現在価値は次式で表せます。

$$\mathrm{PV}(D_m) = \frac{(1+g)^{m-1}}{(1+k)^m}D_1 = \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^{m-1}\frac{D_1}{1+k} \tag{21}$$

したがって, もし $k < g$ ならば, $\frac{1+g}{1+k}$ の分子が分母より大きくなり, m を際限なく大きくしたとき, $\mathrm{PV}(D_m)$ が無限に大きくなります。よって, 配当の期待値の現在価値の和である株価 P_0 も無限に大きくなります。また, もし $k = g$ ならば, $\frac{1+g}{1+k} = 1$ なので, $\mathrm{PV}(D_m) = \frac{D_1}{1+k}$ です。すなわち, 任意の期に受け取る配当の期待値の現在価値が定額の $\frac{D_1}{1+k}$ になるのです。さて, 株価 P_0 は, 将来の各期に受け取る配当の期待値の現在価値の合計に等しいですが, 受け取る期が無限に存在します。したがって, $k = g$ が成立する場合, 株価が無限大になってしまいます。以上, $k < g$ と $k = g$ のいずれのケースでも株価が無限大になるので, $k \leq g$ は起こり得ません。よって, $k > g$ が成立します。

（第 5 章の Web 付録 1）長期国債先物の値洗いの数値例

長期国債先物の場合, 午後の最終約定値段を清算値段と呼び, 損益計算の基準に使います。たとえば, 投資家 C が 2018 年 7 月 31 日午後のオープニングで, 2018 年 9 月限月の長期国債先物 3 枚を 150.37 円で買い建てた（すなわち, 買い建てた先物契約の受渡しが 150.37 円で行われる）としましょう。また, 同日の清算値段が 150.69 円であったとしましょう。その場合, 清算値段が買い建てた値段より 0.32 円高いので, 7 月 31 日に投資家 C に額面 100 円当たり 0.32 円の利益が発生したものとして処理されます。さて, 長期国債先物 1 枚の取引対象は額面 1 億円の長期国債です。したがって, 長期国債先物 1 枚に発生した利益は, 0.32 円に $\frac{1\text{億円}}{100\text{円}}$ を掛けた 32 万円であり, さらに, 長期国債先物 3 枚に発生した利益は, それを 3 倍した 96 万円です。よって, 投資家 C が保有する長期国債先物 3 枚の買いポジションの価値は再評価されて 96 万円高くなります。

さて, 翌日の清算値段が 149.86 円と, 前日の清算値段と比べてが 0.83 円下がったとしましょう。その場合, 額面 100 円当たり 0.83 円の損失が発生したことになります。したがって, 長期国債先物 1 枚に発生した損失は, 0.83 円に $\frac{1\text{億円}}{100\text{円}}$ を掛けた 83 万円であり, さらに, 長期国債先物 3 枚に発生した損失は, それを 3 倍した 249 万円です。よって, 投資家 C が保有する長期国債先物 3 枚の買いポジションは前日に比べて 249 万円低く再評価されます。

（第 5 章の Web 付録 2）コスト・オブ・キャリーモデルの導出の残り半分

この Web 付録では, CCM の仮定のもとで, 先物契約あるいは先渡契約（以下, 両方を含めて先物契約と呼びます）の市場価格が, CCM が与える理論価格を下回るときにリバース・キャッシュ・アンド・キャリーを実行すれば裁定利益が得られることを 5.4 節で説明した例を使って示します。仮に金の先物市場で取引されている価格（先物の市場価格）が 4520 円だとしましょう。このとき, 約定日と先物受渡日に下記の一連の取引（すなわち, リバース・キャッシュ・アンド・キャリー）を実行すれば, 確実に利益を得ることができます。まず, 約定日において次の取引を行います。

- 金先物契約を 1 枚買い建てます。
- 金の現物市場で金 1 キログラムを 456 万 2000 円で空売りします。
- 空売りで得た現金 456 万 2000 円を半年後に満期が到来する金利商品に投資します。

それでは, これらの取引によって約定日に発生するキャッシュフローを列挙します。第 1 に, 金先物契約の買い建てを取り上げると, CCM では, 先物取引に証拠金制度がないと仮定しているので, 約定日にキャッシュフローは発生しません。第 2 に, 金の空売りについては 456 万 2000 円のキャッシュ・インフローが発生します。第 3 に, 456 万 2000 円の金利商品への投資については 456 万 2000 円のキャッシュ・アウトフローが発生します。したがって, 以上のキャッシュフローを合計すると 0 円になります。

次に, この金先物契約の受渡日に次の取引を行います。

- 金先物契約については, 約定日に買い建てたポジションを決済するため, 金 1 キログラムを受け取って（品受け）, 先物代金の 452 万円（先物価格の 4520 円 $\times$ 1000 グラム）を支払います。
- 先物で品受けした金 1 キログラムは, 金の空売りの決済に使います。
- 金利商品に投資した 456 万 2000 円については, 実は, 5.4 節の (5.8) 式で, 金利が単利で年率 0.5% のときの半年後の将来価値を計算しています。したがって, その計算によって得られた 457 万 3405 円を金先物契約の受渡日に受け取ります。

これらの取引によって先物受渡日に発生するキャッシュフローは次の通りです。第 1 に, 金先物契約の決済で 452 万円のキャッシュ・アウトフローが発生します。第 2 に, 金利商品への投資の結果, 457 万 3405 円のキャッシュ・インフローが発生します。したがって, 以上のキャッシュフローを合計すると, 457 万 3405 円 $-$ 452 万円 $=$ 5 万 3405 円 になります。

上記の約定日と先物受渡日における取引を表でまとめると, 表 W–1 のようになります。ただし, CF はキャッシュフローの略です。

（表 W–1）リバース・キャッシュ・アンド・キャリーに発生するキャッシュフロー

	約定日取引	約定日の CF	受渡日取引	受渡日の CF
先物	買い建て	0 円	品受けと代金支払い	−452 万円
現物	金 1 キログラム空売り	456 万 2000 円	先物で品受けした金で決済	0 円
資金	金利商品へ投資	−456 万 2000 円	元利金の受け取り	457 万 3405 円
CF 計		0 円		5 万 3405 円

要するに, 約定日のキャッシュフローは 0 円で, 先物受渡日のキャッシュフローは 5 万 3405 円です。もちろん, この 5 万 3405 円は利益で, 約定日時点で金額が確定しています。さらに, 上で説明した約定日および先物受渡日に実行する一連の取引では, 自己資金をまったく使っていません。したがって, この一連の取引は裁定取引の定義を満たしており, その結果得られる 5 万 3405 円の利益は裁定利益であると言えます。

（注）上場株式や国債には空売りの制度が整備されているので, それらを原資産とする先物契約あるいは先渡契約に, 上の議論がそのまま妥当します。他方, 原資産が上場株式や国債でない場合は, 通常, 空売りの制度が整備されておらず, 上の議論がそのまま妥当しません。しかし, そのような場合でも quasi-arbitrage（直訳すると「準裁定取引」となるので, ここではこの訳を使います）と呼ばれる取引が行えるので, 上の議論に近い議論が成立します。

そこで, この準裁定取引を説明するとそれは, 先物契約の受渡適格銘柄を既に保有する投資家が, 空売りの代わりに, 保有する受渡適格銘柄を先物 1 枚分売る, リバース・キャッシュ・アンド・キャリーです。表 W–2 は, この Web 付録で例示したリバース・キャッシュ・アンド・キャリーについて準裁定取引を行った場合に発生するキャッシュフローをまとめたものです。

（表 W–2）リバース・キャッシュ・アンド・キャリーの
準裁定取引に発生するキャッシュフロー

	約定日取引	約定日の CF	受渡日取引	受渡日の CF
先物	買い建て	0 円	品受けと代金支払い	−452 万円
現物	金 1 キログラムの売り	456 万 2000 円		0 円
資金	金利商品へ投資	−456 万 2000 円	元利金の受け取り	457 万 3405 円
CF 計		0 円		5 万 3405 円

表 W–2 は, この準裁定取引の結果, 5 万 3405 円の裁定利益が得られることを示しています。また, この準裁定取引を実行する投資家は, 先物受渡日に品受けするので, 約定日に

売った金 1 キログラムを先物受渡日に再取得することになります。したがって, この準裁定取引は, 受渡適格銘柄を保有する投資家にとって極めて有利な取引であり, 先物契約あるいは先渡契約の市場価格が, CCM に基づく理論価格から大きく下回ることを防ぐメカニズムとして機能します。

（第 6 章の Web 付録 1）日経 225 オプションの証拠金所要額の計算例

投資家 A が日経 225 プットオプション 3 枚を売り建てたとします。また, このプットオプションの清算価格は 800 円, SPAN 証拠金額は 1 枚当たり 30 万円であるとします。この場合, まず, SPAN 証拠金額が 3 枚で 90 万円になります。また, オプション価値は 800 円 $\times 1000 \times 3 = 240$ 万円 になります。したがって, JSCC に差し入れる証拠金所要額は 90 万円 $+$ 240 万円 $=$ 330 万円 になります。ただし, 証券会社によっては, 証拠金所要額より多い金額を証券会社に差し入れることを要求します。

(第 8 章の Web 付録 1) R_p の公式の導出

このWeb付録では, ポートフォリオが資産1と資産2の2資産で構成される場合について (8.1) 式を導出します。すなわち, $R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2$ を導出します。ただし, 資産1の期首（0時点）の価格を P_1, 期末（時点1）の価格を P_1' で表します。また, 資産2の0時点の価格を P_2, 時点1の価格を P_2' で表します。さらに, 0時点から時点1までの期間において配当等のキャッシュフローは支払われないと仮定します。このとき, 資産1および資産2の収益率はそれぞれ次式で計算できます。

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \tfrac{P_1' - P_1}{P_1} \\
R_2 &= \tfrac{P_2' - P_2}{P_2}
\end{aligned}
$$

さて, ポートフォリオが100単位の資産1と200単位の資産2とで構成されているとすると, ポートフォリオの0時点と時点1における価値はそれぞれ次式によって計算できます。

$$
\begin{aligned}
V_p &= \text{0 時点におけるポートフォリオの価値} \\
&= 100P_1 + 200P_2 \\
V_p' &= \text{時点 1 におけるポートフォリオの価値} \\
&= 100P_1' + 200P_2'
\end{aligned}
$$

したがって, ポートフォリオの収益率 R_p は次のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
R_p &= \frac{V_p' - V_p}{V_p} = \frac{(100P_1' + 200P_2') - (100P_1 + 200P_2)}{100P_1 + 200P_2} \\
&= \frac{100(P_1' - P_1)}{100P_1 + 200P_2} + \frac{200(P_2' - P_2)}{100P_1 + 200P_2} \\
&= \frac{100P_1}{100P_1 + 200P_2}\frac{P_1' - P_1}{P_1} + \frac{200P_2}{100P_1 + 200P_2}\frac{P_2' - P_2}{P_2} \\
&= w_1 R_1 + w_2 R_2
\end{aligned}
$$

ただし, w_1 と w_2 はそれぞれ第1資産と第2資産に対する投資比率を表します。

（第 8 章の Web 付録 2）期待値の性質

この Web 付録では, 続く Web 付録 3 および 4 で必要な期待値の性質を 2 つ紹介します。そのひとつは, **2 つの確率変数の和の期待値は, それぞれの確率変数の期待値を足したものに等しい**という性質です。この性質は確率変数 X と Y を使うと次式で表せます。

$$\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y] \tag{22}$$

この性質は直感的に理解できるでしょうが, 念のためこの性質を使った例を見てみましょう。

（例）太田さんは 2 つの資産を組み入れたポートフォリオを保有しているとします。仮に資産のひとつの 1 年後の価値を X, もうひとつの資産の 1 年後の価値を Y で表すと,（22）式は「太田さんのポートフォリオの 1 年後の価値の期待値は, それぞれの資産の 1 年後の価値を足したものである」ことを主張しています。

また, (22) 式の左辺は 2 つの確率変数についての期待値で, それを扱うのは本書では初めてです。そこで, 次の例で 2 つの確率変数の和の期待値を計算する例を示します。

（例）確率変数 X, Y が次の値をとる可能性があるとします。

$$X=\begin{cases}2\\-2\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1\\4\\-2\end{cases}$$

(22) 式の左辺は期待値 $\mathrm{E}[\cdot]$ なので, それを計算するためには, $\mathrm{E}[\cdot]$ の括弧の中の変数全体が各ケースでとる値と, 各ケースが発生する確率を特定しなければなりません。すなわち, (22) 式の左辺を計算するには, X が特定の値をとり, かつ, Y が特定の値をとるときの $X+Y$ の値とその確率（たとえば, $X=2$ かつ $Y=1$ のときの $X+Y$ の値とその確率 $\mathrm{Prob}[X=2,Y=1]$）を特定しなければなりません。表 W–3 では, これらの値と確率を列挙しています。なお, X が特定の値をとり, かつ, Y が特定の値をとる確率（たとえば, $\mathrm{Prob}[X=2,Y=1]$）は, 外生的に付与されているとします。

（表 W–3）2 つの確率変数 X と Y の分布

ケース i	p_i	x_i	y_i	x_i+y_i
1	0.2	2	1	3
2	0.1	2	4	6
3	0	2	−2	0
4	0.3	−2	1	−1
5	0.1	−2	4	2
6	0.3	−2	−2	−4

このとき, $\mathrm{E}[X+Y]$ は次のように計算されます。

$$\mathrm{E}[X+Y]=0.2\times 3+0.1\times 6+0\times 0+0.3\times(-1)+0.1\times 2+0.3\times(-4)$$

それでは, (22) 式を証明します。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X+Y] &= p_1(x_1+y_1)+p_2(x_2+y_2)+\cdots+p_n(x_n+y_n)\\ &= (p_1x_1+p_1y_1)+(p_2x_2+p_2y_2)+\cdots+(p_nx_n+p_ny_n)\\ &= (p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)+(p_1y_1+p_2y_2+\cdots+p_ny_n)\\ &= \mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]\end{aligned}$$

次に, 期待値に関する 2 つ目の性質を紹介します。それは, **確率変数に定数を掛けたものの期待値は, 確率変数の期待値に定数を掛けたものに等しい**という性質です。この性質は確率変数 X と定数 a を使うと次式で表せます。

$$\mathrm{E}[aX] = a\,\mathrm{E}[X] \tag{23}$$

この性質も直感的に理解できるでしょうが, 念のためこの性質を使った例を見てみましょう。

（例）清水さんのポートフォリオは, NTT 株 100 株で構成されています。ただし, NTT とは日本電信電話株式会社の略称で, NTT 東日本, NTT 西日本, NTT docomo 等を含む NTT グループの持ち株会社です。4.1 節で紹介した, 2019 年 1 月以降の上場株式の株券が無効になるのに合わせて, NTT は 1 株を 100 株に分割し, 1 単元を 1 株から 100 株に変更しました。さて, 清水さんのポートフォリオの 1 年後の価値の期待値は, (23) 式から, NTT の 1 年後の株価の期待値を 100 倍して求めることができます。すなわち, X で NTT 株の 1 年後の株価を表すと, 次式で表せます。

$$\mathrm{E}[100X] = 100\,\mathrm{E}[X]$$

それでは, (23) 式を証明します。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[aX] &= p_1(ax_1)+p_2(ax_2)+\cdots+p_n(ax_n)\\ &= a(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\\ &= a\,\mathrm{E}[X]\end{aligned}$$

（第 8 章の Web 付録 3） $\mathrm{E}[R_p]$ の公式の導出

本 Web 付録では, (8.1) 式, (22) 式, (23) 式を使ってポートフォリオに資産が 2 つある場合について (8.2) 式を導出します。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_p] &= \mathrm{E}[w_1R_1 + w_2R_2] && ;（8.1）式により\\
&= \mathrm{E}[w_1R_1] + \mathrm{E}[w_2R_2] && ;（22）式により\\
&= w_1\,\mathrm{E}[R_1] + w_2\,\mathrm{E}[R_2] && ;（23）式により
\end{aligned}
$$

（第 8 章の Web 付録 4）分散の公式の導出

本 Web 付録では, (8.1) 式, (22) 式, (23) 式を使って (8.3) 式を導出します。まず, 分散の定義によって (24) 式が成立します。次に, (8.1) 式から (24) 式が (25) 式に変形できます。さらに, (22) 式, (23) 式を使うと, (26) 式に変形できます。

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left[(R_p - \mathrm{E}[R_p])^2\right] &(24)\\
&= \mathrm{E}\left[\{(w_1R_1 + w_2R_2) - \mathrm{E}[w_1R_1 + w_2R_2]\}^2\right] &(25)\\
&= \mathrm{E}\left[\{(w_1R_1 - w_1\,\mathrm{E}[R_1]) + (w_2R_2 - w_2\,\mathrm{E}[R_2])\}^2\right] &(26)
\end{aligned}
$$

ここで, X と Y を次式で定義します。

$$
\begin{aligned}
X &= w_1R_1 - w_1\,\mathrm{E}[R_1] &(27)\\
Y &= w_2R_2 - w_2\,\mathrm{E}[R_2] &(28)
\end{aligned}
$$

(27) 式と (28) 式を (26) 式に代入して変形します。

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left[(X+Y)^2\right]\\
&= \mathrm{E}\left[X^2 + Y^2 + 2XY\right] &(29)\\
&= \mathrm{E}\left[X^2\right] + \mathrm{E}[Y^2] + 2\,\mathrm{E}[XY] &(30)
\end{aligned}
$$

ただし, (29) 式から (30) 式への変形は, (22) 式と (23) 式を使いました。ここで再び (27) 式と (28) 式を使って, (30) 式を R_1 と R_2 で表します。

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left[w_1^2\,(R_1 - \mathrm{E}[R_1])^2\right] + \mathrm{E}\left[w_2^2\,(R_2 - \mathrm{E}[R_2])^2\right]\\
&\quad +2\,\mathrm{E}\left[w_1w_2(R_1 - \mathrm{E}[R_1])(R_2 - \mathrm{E}[R_2])\right] &(31)\\
&= w_1^2\,\mathrm{E}\left[(R_1 - \mathrm{E}[R_1])^2\right] + w_2^2\,\mathrm{E}\left[(R_2 - \mathrm{E}[R_2])^2\right]\\
&\quad +2w_1w_2\,\mathrm{E}\left[(R_1 - \mathrm{E}[R_1])(R_2 - \mathrm{E}[R_2])\right] &(32)\\
&= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}
\end{aligned}
$$

ただし, (31) 式から (32) 式への変形は, (23) 式を使いました。

（第 8 章の Web 付録 5）危険資産の空売りとその効果

この Web 付録では, 1 つの危険資産を空売りし, その代金を当初の投資資金に加えてもう 1 つの危険資産に投資する場合の期待収益率と標準偏差を計算します。

（注）上場株式の信用取引制度を利用すれば個人投資家でも株式の空売りをすることができます。ただし, 空売りで得た代金は信用口座から引き出すことができないので,「その代金を当初の投資資金に加えて」という設定は実行できないようにみえます。しかし, 次のように考えれば, この設定がそれほど非現実的ではないことが分かるでしょう。仮に投資家の当初投資資金は 1000 万円で, 銘柄 X を 400 万円で空売りしたとします。さらに, 同じ投資家が 400 万円を借り入れて当初資金の 1000 万円を合わせ, 銘柄 Y を 1400 万円分買ったとします。この場合, この投資家が保有する資産を考えるに当たって信用口座に預けた 400 万円と借り入れた 400 万円が相殺したと考えれば, この投資家が保有する資産は, 銘柄 X に負の投資をした 400 万円と銘柄 Y に正の投資をした 1400 万円であるとみなすことができます。もちろんその場合, ポートフォリオの総価値は -400 万円 $+$ 1400 万円 $=$ 1000 万円 です。その結果, この投資家の銘柄 X への投資比率は $\frac{-400\text{ 万円}}{1000\text{ 万円}} = -0.4$, 銘柄 Y への投資比率は $\frac{1400\text{ 万円}}{1000\text{ 万円}} = 1.4$ と計算できます。

ポートフォリオの期待収益率と標準偏差の計算は, 次の例について行います。

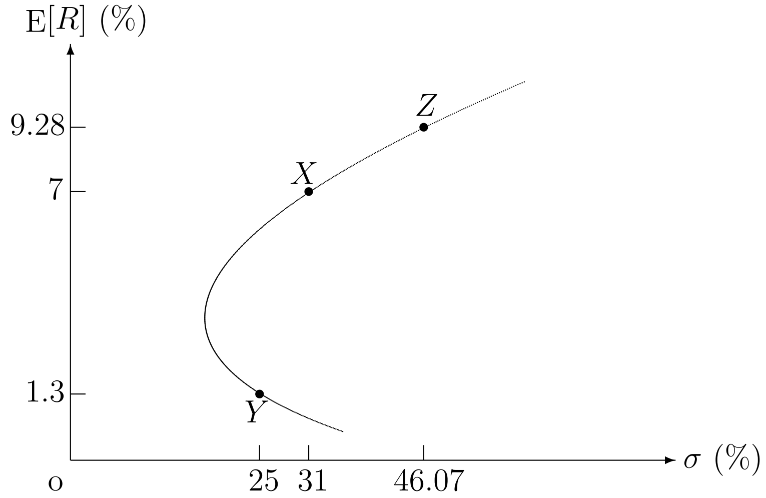
（例）資産 X の期待収益率は 7%, 標準偏差は 31% であるとします。また, 資産 Y の期待収益率は 1.3%, 標準偏差は 25% であるとします。さらに, 資産 X と資産 Y の間の相関係数は –0.16 であるとします。このとき, 資産 X への投資比率を 1.6 から –0.2 まで小さな刻みで変化させてこのポートフォリオの期待収益率と標準偏差を計算し, そのペアを点としてプロットしたのが図 W–1 です。念のために資産 X への投資比率が 1.4 のときの期待収益率と標準偏差の計算を下に記します。なお, 資産 X への投資比率が 1.4 のとき, 資産 Y への投資比率は –0.4 です。すなわち, 資産 Y を空売りしていることになります。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_p] &= 1.4 \times 7 + (-0.4) \times 1.3 = 9.28 \ (\%) \\
\mathrm{Var}[R_p] &= 1.4^2 \times 31^2 + (-0.4)^2 \times 25^2 \\
&\quad +2 \times 1.4 \times (-0.4) \times (-0.16) \times 31 \times 25 \\
&= 2122.44 \ (\%^2)
\end{aligned}
$$

したがって, 期待収益率は 9.28%, また, 標準偏差は分散の正の平方根をとって約 46.07% です。このペアは図 W–1 の点 Z で表しています。

図 W–1 の点 Z を見て分かるように, 期待収益率が低い資産 Y を空売りして期待収益率が高い資産 X への投資を上積みすると, ポートフォリオの期待収益率は資産 X よりも高くなり, 標準偏差も資産 X より高くなります。なお, 期待収益率が高い資産 X を空売りして期待収益率が低い資産 Y への投資を上積みする場合, ポートフォリオの期待収益率は資産 Y よりも低くなりますが, 標準偏差は資産 Y よりも高くなります。

（図 W–1）2 つの危険資産を組み入れたポートフォリオの $\mathrm{E}[R_p]$ と σ_p



（第 9 章の Web 付録 1）期待値として表現された共分散

本 Web 付録では, 7.8 節の冒頭で指摘した「共分散が期待値として定義されている」ことを確認します。この点を第 9 章の Web 付録として確認するのは, この点を表す (34) 式を第 9 章の Web 付録 2 で使うからです。

それでは, まず, 7.8 節で (7.6) 式によって共分散を定義したことを思い起こしましょう。そのため, (7.6) 式を再掲します。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X,Y] &= (d_i\text{の加重平均}) \\ &= p_1 d_1 + \cdots + p_n d_n \\ &= p_1(x_1 - \mathrm{E}[X])(y_1 - \mathrm{E}[Y]) + p_2(x_2 - \mathrm{E}[X])(y_2 - \mathrm{E}[Y]) + \\ &\quad \cdots + p_n(x_n - \mathrm{E}[X])(y_n - \mathrm{E}[Y]) \qquad (33)\end{aligned}$$

(33) 式で $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は, 確率変数 X, Y のペアがそれぞれ $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_2, Y = y_2\}, \ldots, \{X = x_n, Y = y_n\}$ をとる確率を表します。また, (33) 式では, $(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])$ を 1 つの確率変数 D とみなし, それが各ケースでとる値を $d_1, d_2, \ldots, d_n$ で表しています。したがって，(33) 式は, 共分散が $D = (X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])$ の期待値であることを表しています。そこで, 共分散を次式で定義することができます。

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \qquad (34)$$

（第 9 章の Web 付録 2）共分散の性質

この Web 付録では, Web 付録 3 以降で使う共分散の性質を紹介します。まず, X, Y, Z を確率変数とし, a, b を定数とします。このとき, 共分散について次式が成立します。

$$\mathrm{Cov}[aX + bY, Z] = a\,\mathrm{Cov}[X, Z] + b\,\mathrm{Cov}[Y, Z] \tag{35}$$

(35) 式を言葉で言い表すと, 確率変数 X, Y のそれぞれに定数を掛けたものの和とほかの確率変数 Z との間の共分散 $\mathrm{Cov}[aX + bY, Z]$ は, X と Z の共分散 $\mathrm{Cov}[X, Z]$ に定数を掛けたものと,YとZの共分散 $\mathrm{Cov}[Y, Z]$ に定数を掛けたものの和に等しいことを表しています。(35) 式を証明する前に簡単な応用例を示します。

（例）服部さんのポートフォリオは, NTT100 株と日産自動車 2000 株で構成されているとします。また, NTT 株式の 1 年後の株価を X, 日産株式の 1 年後の株価を Y で表すとします。このとき, 服部さんのポートフォリオの 1 年後の価値 $(100X + 2000Y)$ と日経平均の 1 年後の水準 Z との間の共分散は, NTT 株の 1 年後の株価 X と Z の共分散に 100 株を掛けたものと, 日産の 1 年後の株価 Y と Z の共分散に 2000 株を掛けたものとの和に等しいです。

$$\mathrm{Cov}[100X + 2000Y, Z] = 100\,\mathrm{Cov}[X, Z] + 2000\,\mathrm{Cov}[Y, Z]$$

次に, (35) 式を証明します。なお, この証明では, (34) 式のほか, 第 8 章の Web 付録 2 で紹介した期待値の性質（$\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[aX] = a\,\mathrm{E}[X]$）を繰り返し使います。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[aX + bY, Z] &= \mathrm{E}[(aX + bY - \mathrm{E}[aX + bY])(Z - \mathrm{E}[Z])] \\
&= \mathrm{E}[(aX - \mathrm{E}[aX] + bY - \mathrm{E}[bY])(Z - \mathrm{E}[Z])] \\
&= \mathrm{E}[(aX - a\,\mathrm{E}[X])(Z - \mathrm{E}[Z]) + (bY - b\,\mathrm{E}[Y])(Z - \mathrm{E}[Z])] \\
&= \mathrm{E}[(aX - a\,\mathrm{E}[X])(Z - \mathrm{E}[Z])] + \mathrm{E}[(bY - b\,\mathrm{E}[Y])(Z - \mathrm{E}[Z])] \\
&= a\,\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Z - \mathrm{E}[Z])] + b\,\mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}[Y])(Z - \mathrm{E}[Z])] \\
&= a\,\mathrm{Cov}[X, Z] + b\,\mathrm{Cov}[Y, Z]
\end{aligned}$$

より一般的には, $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ が確率変数で $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が定数のとき, 次式が成立します。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n, Z] \\
&\quad= a_1\,\mathrm{Cov}[X_1, Z] + \cdots + a_n\,\mathrm{Cov}[X_n, Z]
\end{aligned} \tag{36}$$

また, 次式も成立します。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}[Z, a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] \\
&\quad= a_1\,\mathrm{Cov}[Z, X_1] + \cdots + a_n\,\mathrm{Cov}[Z, X_n]
\end{aligned} \tag{37}$$

次に, (35) 式を使ってポートフォリオの収益率の間の共分散を計算します。

（例）ポートフォリオ A は, 資産 1 と資産 2 で構成されているとします。このとき, ポートフォリオ A とポートフォリオ B との共分散 $\mathrm{Cov}[R_A, R_B]$ を, 資産 1 とポートフォリオ B の共分散 $\mathrm{Cov}[R_1, R_B]$ と, 資産 2 とポートフォリオ B の共分散 $\mathrm{Cov}[R_2, R_B]$ とを使って表現してみましょう。そのためには, (35) 式を適用すればよいです。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[R_A, R_B] &= \mathrm{Cov}[w_1 R_1 + w_2 R_2, R_B] \\ &= w_1 \mathrm{Cov}[R_1, R_B] + w_2 \mathrm{Cov}[R_2, R_B]\end{aligned}$$

より一般的には, ポートフォリオ A が資産 $1, 2, \ldots, n$ で構成されているとき, (38) 式が導出できます。

$$\mathrm{Cov}[R_A, R_B] = w_1 \mathrm{Cov}[R_1, R_B] + w_2 \mathrm{Cov}[R_2, R_B] + \cdots + w_n \mathrm{Cov}[R_n, R_B] \tag{38}$$

（第 9 章の Web 付録 3）σ_p^2 を個別資産と接点ポートフォリオの共分散で表現

この Web 付録 3 の前半では, ポートフォリオの分散 σ_p^2 を, ポートフォリオに組み入れた個別資産とポートフォリオとの間の共分散 σ_{ip} で表現します。そのため, ポートフォリオに組み入れる安全資産に対する投資比率を w_f で表し, 危険資産 $1, 2, \ldots, n$ に対する投資比率を $w_1, w_2, \ldots, w_n$ で表します。このとき, 投資比率の合計が 1 に等しいという条件は, $w_f + w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ と表せます。また, ポートフォリオの収益率 R_p は次式で表せます。

$$R_p = w_f R_f + w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n$$

それでは, ポートフォリオの分散 σ_p^2 を, ポートフォリオに組み入れた個別資産とポートフォリオの間の共分散 σ_{ip} で表現する式を導出しましょう。ただし, 次式の 2 行目から 3 行目への変形では (34) 式, 3 行目から 4 行目への変形では (38) 式を使います。

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}[(R_p - \mathrm{E}[R_p])^2] \\
&= \mathrm{E}[(R_p - \mathrm{E}[R_p])(R_p - \mathrm{E}[R_p])] \\
&= \mathrm{Cov}[R_p, R_p] \\
&= w_f \,\mathrm{Cov}[R_f, R_p] + w_1 \,\mathrm{Cov}[R_1, R_p] + \cdots + w_n \,\mathrm{Cov}[R_n, R_p] \\
&= w_f \sigma_{fp} + w_1 \sigma_{1p} + \cdots + w_n \sigma_{np} \\
&= w_1 \sigma_{1p} + \cdots + w_n \sigma_{np} \qquad (39)
\end{aligned}$$

なお, (39) 式に安全資産に関わる項 $w_f \sigma_{fp}$ がないのは, 8.5 節で確認したように, 安全利子率と任意の資産の収益率の共分散が 0 であるため, $\sigma_{fp} = 0$ となるからです。

次に, この Web 付録 3 の後半では, ポートフォリオの分散 σ_p^2 を, ポートフォリオに組み入れた個別資産と接点ポートフォリオの間の共分散 σ_{iT} で表現します。そのため, 図 8‐14 を使って説明した, 安全資産が存在する場合の最適ポートフォリオの構築について復習しましょう。安全資産が存在する場合, 任意の投資家にとって最適なポートフォリオは安全資産と接点ポートフォリオ T を組み入れたポートフォリオです。したがって, 今までと同様, 安全資産への投資比率を w_f で表すと, 接点ポートフォリオへの投資比率は $1 - w_f$ で表すことができます。よって, 任意の投資家が保有する最適ポートフォリオ p の収益率 R_p は次式のように, 安全利子率 R_f と接点ポートフォリオの収益率 R_T の加重平均として表せます。

$$R_p = w_f R_f + (1 - w_f) R_T$$

次に, 資産 i と最適ポートフォリオ p との間の共分散 $\mathrm{Cov}[R_i, R_p]$（すなわち, σ_{ip}）を, 資産 i と接点ポートフォリオ T との間の共分散 $\mathrm{Cov}[R_i, R_T]$（すなわち, σ_{iT}）を使って表現してみましょう。ただし, 以下の式の変形においては (35) 式のほか, 安全利子率と任意の資産の収益率の共分散が 0 になる性質を使いました。

$$\begin{aligned}\sigma_{ip} &= \mathrm{Cov}[R_i, R_p] \\ &= \mathrm{Cov}[R_i, w_f R_f + (1-w_f)R_T] \\ &= w_f \,\mathrm{Cov}[R_i, R_f] + (1-w_f)\,\mathrm{Cov}[R_i, R_T] \\ &= (1-w_f)\,\mathrm{Cov}[R_i, R_T] \\ &= (1-w_f)\sigma_{iT} \qquad (40)\end{aligned}$$

(40) 式を (39) 式に代入すると次式を得ます。

$$\sigma_p^2 = w_1(1-w_f)\sigma_{1T} + \cdots + w_i(1-w_f)\sigma_{iT} + \cdots + w_n(1-w_f)\sigma_{nT} \qquad (41)$$

これが本文の (9.2) 式です。すなわち, 9.5 節で述べたように, 個別資産 i の σ_p^2 への直接的な影響は, $w_i(1-w_f)\sigma_{iT}$ によって決定されます。

ちなみに, (41) 式は, 同質的期待を仮定するかどうかにかかわらず成立します。したがって, 同質的期待を仮定しない第 8 章の文脈では, (41) 式の p が表すポートフォリオは, 図 8–14 の点 V が表すポートフォリオであって, それは, 安全資産 R_f と接点ポートフォリオ T を組み入れたポートフォリオです。そして, 第 8 章の文脈では, 投資家はリスク回避度が異なるだけでなく, 危険資産に関する期待収益率, 分散, 共分散の予想が異なるため, 接点ポートフォリオ T を構成する資産の組み合わせも投資家によって異なります。他方, 同質的期待を仮定する CAPM の世界では, (41) 式の p が表すポートフォリオは, 市場ポートフォリオと安全資産を組み入れたポートフォリオです。したがって, 危険資産の組み合わせについてはすべての投資家が同一のポートフォリオ, すなわち, 市場ポートフォリオを保有しています。しかし, 投資家によってリスク回避度が異なるので, 安全資産と市場ポートフォリオに対する投資比率は投資家によって異なります。

（第 9 章の Web 付録 4）ポートフォリオのベータと組み入れ資産のベータの関係の導出

この Web 付録では, (9.7) 式を導出します。ただし, 次の式の変形では, (38) 式を使います。

$$
\begin{aligned}
\beta_p &= \frac{\mathrm{Cov}[R_p, R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}[w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n, R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]} \\
&= \frac{w_1 \mathrm{Cov}[R_1, R_M] + \cdots + w_n \mathrm{Cov}[R_n, R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]} \\
&= w_1 \frac{\mathrm{Cov}[R_1, R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]} + \cdots + w_n \frac{\mathrm{Cov}[R_n, R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]} \\
&= w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \cdots + w_n \beta_n
\end{aligned}
$$

（第 9 章の Web 付録 5）期待収益率と価格の期待値の関係の導出

ある資産の期首の価格を P_0, 期末の価格を P_1, そして, この資産を期首から期末まで保有することで得られるキャッシュフローの期末における将来価値を D_1 とします。さらに, この資産を期首から期末まで保有することで得られる収益率を R で表します。このとき, この資産の期待収益率 $\mathrm{E}[R]$ を, P_1 の期待値 $\mathrm{E}[P_1]$ と D_1 の期待値 $\mathrm{E}[D_1]$ を使って表してみましょう。ただし, 以下の式の変形では, 第 8 章の Web 付録 2 で解説した期待値の性質（$\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[aX]=a\,\mathrm{E}[X]$）を使います。また, 投資家は期首時点の価格が観察できることを前提にしているため, P_0 は定数として扱います。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[R] &= \mathrm{E}\left[\frac{P_1-P_0+D_1}{P_0}\right] \\
&= \frac{\mathrm{E}[P_1-P_0+D_1]}{P_0} \\
&= \frac{\mathrm{E}[P_1]-P_0+\mathrm{E}[D_1]}{P_0}
\end{aligned}
$$

（第 9 章の Web 付録 6）資産 A, B, C を組み入れたポートフォリオを表す点は必ず資産 A, B, C を表す点を通る平面上にあることの証明

資産 A, B, C の期待収益率は, (9.19) 式, (9.20) 式, (9.21) 式の左辺あるいは右辺によって表現できます。また, 資産 A, B, C を組み入れたポートフォリオ p の期待収益率は, (8.2) 式によって与えられます。そこで, (9.19) 式, (9.20) 式, (9.21) 式の右辺を (8.2) 式に代入します。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_p] &= w_A \,\mathrm{E}[R_A] + w_B \,\mathrm{E}[R_B] + w_C \,\mathrm{E}[R_C] \\
&= w_A(c + 1.0d_1 + 0.6d_2) + w_B(c + 0.5d_1 + 1.0d_2) \\
&\quad + w_C(c + 0.3d_1 + 0.2d_2) \qquad (42) \\
&= (w_A + w_B + w_C)c \\
&\quad + (1.0w_A + 0.5w_B + 0.3w_C)d_1 \qquad (43) \\
&\quad + (0.6w_A + 1.0w_B + 0.2w_C)d_2
\end{aligned}$$

(43) 式の第 1 項の括弧内の表現は, 保有する資産すべての投資比率の和です。したがって, それは必ず 1 に等しいです。すなわち, $w_A + w_B + w_C = 1$ が成立します。また, 第 2 項の括弧内の表現は, 資産 A, B, C の, 第 1 ファクターに対する感応度である 1, 0.5, 0.3 を, 資産 A, B, C への投資比率で加重平均したものです。したがって, 9.8 節で学習したポートフォリオのファクター感応度とポートフォリオに組み入れられた資産のファクター感応度の関係式から, 第 2 項の括弧内の表現がポートフォリオ p の, 第 1 ファクターに対する感応度 b_{p1} であることが分かります。さらに, 同様の議論によって, 第 3 項の括弧内の表現がポートフォリオ p の, 第 2 ファクターに対する感応度 b_{p2} であることが分かります。よって, ポートフォリオ p の期待収益率 $\mathrm{E}[R_p]$ は次の (44) 式で表せます。

$$\mathrm{E}[R_p] = c + b_{p1}d_1 + b_{p2}d_2 \qquad (44)$$

最後に, (44) 式の c, d_1, d_2 に, ステップ 4 で解いた c, d_1, d_2 の解を代入すれば, 次の（45）式が得られます。

$$\mathrm{E}[R_p] = 6 + 3b_{p1} + 6b_{p2} \qquad (45)$$

さて, (45) 式は, 資産 A, B, C を組み入れたポートフォリオ p の期待収益率 $\mathrm{E}[R_p]$ が, ポートフォリオ p がとるファクター感応度の値において資産 A, B, C を表す点を通る平面がとる縦軸上の値（すなわち, 期待収益率）に一致することを示しています。したがって, この事実から, 資産 A, B, C を組み入れた任意のポートフォリオ p を表す点は必ず資産 A, B, C を表す点を通る平面上にあると言えます。

(第 10 章の Web 付録 1) BSM の漸近線の導出

6.5 節で図 6–6 について「コールの理論価格を表すグラフは右端がペイオフ・ダイアグラムからやや離れています」と指摘しました。この点は BSM の (10.5) 式を分析することによって明らかにすることができます。まず, 「グラフの右端」とは S が大きな値をとった場合に対応します。そこで, S が大きな値をとった場合を検討すると, その場合, K, r, T がすべて定数なので $\frac{S}{Ke^{-rT}}$ も大きな値をとり, さらに, 図 10–2 から自然対数のグラフが右上がりなので, $\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)$ も大きな値をとります。その結果, d_1 および d_2 が大きくなるので, (10.5) 式の右辺の $N(d_1)$ と $N(d_2)$ の値がともに 1 に近づきます。よって, S が大きな値をとるとき (10.5) 式は $C = S - Ke^{-rT}$ にほぼ一致します。ちなみに, 数学ではこの式が表す直線を漸近線と呼びます。

さて, 株価が行使価格 K よりずっと大きな値 S をとる場合について考えると, 株価が S のとき, 漸近線の高さは $S - Ke^{-rT}$ で表せます。また, そのとき, コールのペイオフ・ダイアグラムの高さは $C = S - K$ で表せます。もちろん, Ke^{-rT} が K より小さいので, 漸近線の方がペイオフ・ダイアグラムより高くなります。したがって, 「コールの理論価格を表すグラフは右端がペイオフ・ダイアグラムからやや離れています」と言えるのです。なお, 漸近線 $C = S - Ke^{-rT}$ から $C = S - K$ を差し引くと, $K - Ke^{-rT}$ を得ます。これは, 行使価格 K と行使価格の現在価値 Ke^{-rT} の差なので, 行使価格に対する金利であると解釈できます。

次に, プットについても (10.6) 式を使って漸近線を求めます。まず, S が小さな値をとった場合, K, r, T がすべて定数であるため $\frac{S}{Ke^{-rT}}$ も小さな値をとります。そして, もし S が十分小さければ, $\frac{S}{Ke^{-rT}}$ が 1 より小さな正の値をとります。その場合, $\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)$ は符号が負で絶対値が大きな値になります。したがって, d_1 および d_2 も符号が負で絶対値が大きな値になり, $-d_1$ および $-d_2$ は符号が正で値が大きな数になります。その結果, (10.6) 式の右辺の $N(-d_1)$ と $N(-d_2)$ がともに 1 に近い値をとります。よって, S が小さな値をとるとき (10.6) 式は $P = Ke^{-rT} - S$ にほぼ等しくなります。これがプットに関する BSM の漸近線です。他方, プットのペイオフ・ダイアグラムを式で表すと, $P = K - S$ です。もちろん, Ke^{-rT} が K より小さいので, 6.5 節で指摘したように「プットの理論価格を表すグラフは左端がペイオフ・ダイアグラムに交わっています」。

(第 10 章の Web 付録 2)デルタがヘッジのための比率として使える根拠

原資産 x 単位の買いポジションとコールオプション 1 単位の買いポジションを組み入れたポートフォリオを考えます。また, 本文と同様, 原資産価格を S, コールオプションの価格を C で表します。このとき, ポートフォリオの価値 V は次式で表せます。

$$V = xS + C$$

さて, 極めて短い期間に起こる原資産価格の変化を ΔS, それに対応して起こるコールオプション価格の変化を ΔC で表すと, 当該ポートフォリオの価値変化 ΔV は, 次式で表せます。

$$\Delta V = x\Delta S + \Delta C$$

原資産価格が変化しても当該ポートフォリオの価値変化が 0 であるためには x が次式を満たせばよいです。

$$x\Delta S + \Delta C \quad = 0$$

上の式を x について解くと, $x = -\frac{\Delta C}{\Delta S}$ を得ます。

さて, $\frac{\Delta C}{\Delta S}$ は, 原資産価格の微少な変化に対するコールオプション価格の微少な変化の比なので, 図 6–6 のコールオプション価格のグラフの S における傾き, すなわちコールオプションのデルタです。したがって, $x = -\frac{\Delta C}{\Delta S}$ の意味するところは, デルタが示す数量分の原資産の売りポジションと, コールオプション 1 単位の買いポジションを組み合わせれば, 両者の損益が相殺するので, 価格変動に対してヘッジすることができるということです。あるいは, 本文で述べたように, デルタが示す数量分の原資産の買いポジションと, コールオプション 1 単位の売りポジションを組み合わせれば, 両者の損益が相殺して, 価格変動に対してヘッジすることができるということです。

次に, 上で検討した問題を言い換えた問題を解きます。すなわち, N 単位の原資産の買いポジションで発生する価値変動をコールオプションを使ってヘッジするためには, 何単位のオプションを保有すればよいだろうかという問題を解きます。そのため, まず, 原資産の買いポジションとコールオプションの買いポジションを組み入れたポートフォリオの価値 V を次式で表します。

$$V = NS + xC$$

よって, このポートフォリオの価値変化 ΔV は次式で表せます。

$$\Delta V = N\Delta S + x\Delta C$$

原資産価格とコールオプション価格が変化してもこのポートフォリオの価値変化が 0 になるには x が次式を満たせばよいです。

$$N\Delta S + x\Delta C = 0$$

上の式を解くと, 次式を得ます。

$$x = -N\frac{\Delta S}{\Delta C} = -\frac{N}{\frac{\Delta C}{\Delta S}} = -\frac{N}{\text{デルタ}}$$

上の式から, 原資産の単位数 N をデルタで割って得た数量分のコールの売りポジションを保有すれば, N 単位の原資産の買いポジションに発生する損益をヘッジできることが分かります。